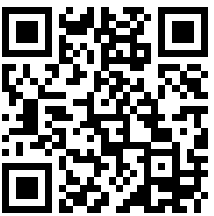
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

The University of Chicago
Libraries

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Math

BOLLETTINO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO LIBRARIES

DI

BIBLIOGRAFIA E STORIA

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PUBBLICATO PER CURA

DI

GINO LORIA

ANNO XX — SERIE II — VOL. I

1918

PALERMO

LIBRERIA SCIENTIFICA D. CAPOZZI

Piazza Croce dei Vespri 8

1918

Digitized by Google

QA1
.B7
Sci

Proprietà letteraria

Tipografia Scientifica D. Capozzi — Palermo

Digitized by Google

714535

INDICE

E. Bartolotti, Notizie su la Facoltà di Scienze matematiche della R. Università di Modena p. 1-11.
G. Vivanti, Adolfo Viterbi (1873-1017) p. 33-37.
G. Fubini e G. Loria, Eugenio Elia Levi (1883-1919) p. 38-45.
G. Pittarelli, Sul significato della parola « Prospettiva » usata nella Legge sulla Conservazione dei Monumenti p. 65-76.
C. Pascal, Alberto Pascal (23 Dicembre 1894, 28 Gennaio 1918) p. 97-99.

RECENSIONI ED ANNUNZI

L. Braude, Les coordonnées intrinsèques (G. L.) p. 12. — **E. Ciani,** Il metodo delle coordinate proiettive omogenee (C. Rosati) p. 13-15. — **G. Fubini,** Lezioni di analisi infinitesimale (E. E. Levi) p. 15-16 — **U. Dini,** Lezioni di analisi infinitesimale, Vol. II, (G. Vivanti) p. 17-18. **G. Vivanti,** Equazioni integrali lineari (G. Fubini) p. 18-20. **P. Ruffini,** Opere matematiche, (T. I.), p. 20-21. **Euclide-Vacca,** Il primo Libro degli Elementi, p. 21. — (G. L.) — **G. Colonnetti,** Principî di statica dei solidi elastici (P. Burgatti) p. 22-29. — **S. Pincherle,** Lezioni di calcolo infinitesimale (E. Bortolotti) p. 46-51. — **F. Enriques,** Teoria geometrica delle equazioni, Vol. I, p. 52-62 (E. Ciani). — **G. Loria,** Guida allo studio della storia della matematica p. 76-77. — **A. Marfariane,** Lectures on ten British Mathematicians (G. L.) p. 77-78. — **G. A. Miller,** Historical Introduction to matematical Literature (G. L.) p. 78-79. — **F. Cajori,** W. Oughtred (G. L.) p. 80-81.— **F. G. Teixeira,** Obras VII (G. L.) p. 81-82. — **Heiberg et Menge,** Euclidis opera VIII, (G. L.) p. 82. — **A. Loewy,** Algebra I (G. Vivanti) p. 83. — **E. A. Elliot,** Algebra of Quanties (G. L.) p. 84-85. — **F. Riesz,** Les systèmes d'équationes linéaires à une infinité d'inconnues (G. Vivanti) p. 85. — **G. Vivanti,** Nuovi esercizi di analisi infinitesimale (G. Fubini) p. 85-86. — **C. de la Vallée Poussin,** Integrales de Lebesgue (G. Vivanti) p. 87-8. — **Whittaker and Watson,** Modern Analysis (G. Vivanti) p. 88. — **Richardson and Landis,** Fundamental Conceptions of Modern Mathematies (G. L.) p. 88-89. — Mathem. Abhandhnugen. A. H. Schwarz gewidmet (G. L.) p. 90-91. — **H. Wieleitner,** Algebraische Kurven, I (G. L.) p. 92-93. — **Lomberg,** Refléxions sur la proprieté d'une courbe (G. L.) p. 93-94. — H. **Michnick,** Sonnenuhren I (G. L.) p. 94.— **I. Rey Pastor,** Geometria projectiva superior (G. L.) p. 99-102. — **C. Fernandez Banos,** Espacios complexos de n dimensiones (G. L.) p. 102. — **I. Hjelmslev,** Geometrische Experimente (G. L.) p. 103-4. — **E. Veneroni,** Le similitudini (G. Burnengo) p. 104-107. — **G. Torelli,** Analisi infinitesimale (M. Cipolla) p. 107.111. — I. Rey **Pastor,** Representasion conforme (G. L.) p. 112. — **G. H. Halphen,** Oeuvres T. I. (G. L.) p. 112-114. — **Heiberg,** Archimedis Opera II ed. (G. L.) p. 114. — **I. Rey Pastor,** In-

Digitized by Google

troducio a la matematica superior (G. L.) p. 114-115. — **P. Burgatti,** Lezioni di meccanica razionale (M. Bottasso) p. 115-120. — **M. d'Ocague,** Cours de géométrie (G. L.) p. 121-123. **P. Fantasia,** Sistema di proiezione conforme (G. L.) p. 123. — **C. Perrigeux et A. Weber,** Le relief en géométrie (G. L.) p. 123. **Schell-Salkowski,** Kurven doppelter Krïmmung (G. L.) p. 123-126.

PUBBLICAZIONI RECENTI SULLA STORIA DELLA MATEMATICA

Zeuthen, Smith and Ginsburg, Suter, Child, Favaro, Cardoso Pereire, Karpinski, Giovannozzi, Gambioli, Bortolotti, Viriglio, Loria, Amodeo, Johnston, Cajori.

NOTIZIE

P. 30-32, 94-96, 127-128.

Digitized by Google

INDICE DEI NOMI

Abbati Marescotti 2-3-4
Abdank-Abakanowicz 111
Abel 79, 129
Abraham 117
Agnesi M. G. 51
Alberti 70
Alberti L. B. 66. 67, 69
d'Alembert 30
Allegri A. 70
Amodeo 7, 64
Apollonio 79
Appell 85, 116-117
Araldi 3-4.
d'Arcais 39
Archimede 62, 79, 114
Ariosto 75.
Aronhold 61, 84
Arzelà 39

Bacelli 3
Bachet de Méziriac 128
Bagnera 39, 46
Baire 87
Baldi B. 96
Baldinucci 74-75-76
Baraldi 2
Barbieri A. 8.
Barbieri G. 4.
Bartoli C. 66.
Battaglini 107.
Ben Ezra 62
Berfereri C. 4.
Berkley 64
Bernini L. 75
Bernoulli 17, 51
Bertini 57
Bessel 88.
Betti 25-26-28.
Beutel 92.
Bézout 59
Bianchi L. 39.
Bidasio R. 4.
Bieberbach 112.
Boezio 69.
Bolognini 3.
Bolza 90.
Bolzano 30.
Bonaini 96.
Bontalenti 71.
Boole 78.
Bordin 127.
Borel 47, 87.
Bortolotti 1, 20, 51, 64
Bottasso 120.
Bouquet 113.
Braude 12.
Bruhns 30.
Brunn 94.
Burali-Forti 116-117.
Burgatti 29, 115, 120.
Burnengo 42, 107.

Caccianino 4.
Cagnoli 4.
Cajori 64, 80-81, 96.
Calori 3-4.
Canevazzi 7.
Cantor G. 107.
Cantor M. 98.
Caratheodory 90.
Cordaro 128.
Cardoso Pereire 63.
Cassiani 2-4.
Castigliano 25-26.
Cauchy 41, 45, 45, 79, 88, 115.
Caner 90.
Cavalieri B. 51-53.
Cavedoni 3.
Cavani 5,6,7.
Cayley 78-79, 100-101.
Cazzaniga 36.
Cecchi 68.
Cennini 72.
Ceretti 3.
Cesari 9.
Cesàro 12, 22, 23, 107.

Digitized by Google

Ceva 98.
Chasles 57-94
Child 63.
Chisini 52.
Choisy 69.
Ciani 13-15, 62.
Cigoli 73.
Cimabue 71.
Cipolla 111.
Clairaut 51.
Clapeyron 23.
Clebsch 23, 52, 54, 56, 84.
Clifford 78.
Coggi 10.
Colecchi 64.
Colombini 10.
Colonnetti 22, 29.
da Como 128.
Cousin 32.
Cramer 59.
Cremona G. 7, 4.
Cremona L. 57, 69, 79, 100.
Culmann 26.
Cummings 128.
Currie 117.

Damoiseau 127.
Dante 74.
Darboux 108.
Dedekind 83.
Descartes 79-81.
Dini 17, 18, 38, 46.
Diofanto 79.
Dirichlet 20, 34, 37, 112.

Eiba 21.
Elliot 84-85.
Eneström 98.
Enriques 52, 62.
Ermete Trismagisto 95.
Euclide 21, 63, 79, 82, 103.
Eulero 17, 42, 119, 120.
Eutocio 114.

Faidherbe 113.
Fanfani 65.
Fantasia 123.
Fattori 3.
Favaro 63, 128.
Fejer 90
Fermat 79.
Fernandz Bano 102.
Fergola N. 103.
Festa 21.
Fibonacci 79.
Fontanelli 3.
Forcellini 69.
Fornasini 128.
Foschieri 1.
Fourier 45, 85, 88, 115.
dei Franceschi 69.
Francesco III 2-4.
Fredholm 19-20.
Frullani 17.
Fubini 7, 15, 16, 20, 38, 86.
Fürstenan 85.
Füter 30.

Gabriel Marie 95-96.
Galileo Galilei 66, 67, 69, 72, 73, 79, 98.
Galois 34, 79.
Gamba 34, 37.
Gambioli 64.
Gauss 42, 79, 102, 123.
Genovesi 98.
Gergonne 59.
Gerhardt 63
Germain 91.
Gherli 2.
Ginsburg 62.
Giovanna d'Austria 71.
Giovannozzi 63.
G. L. *vedi* Loria
Glissenti 128.
Gnaga 128.
Gram 53.
Grandi 98.
Grassmann 30, 117.
Green 24, 28, 50.

Digitized by Google

Griffini 95.
Guerrini 68.
Guerrini P. 128.
Gucciardini 72.

Hadadamard 19, 95.
Halphen 112, 114.
Hamburger 127.
Hamilton 78, 79, 116, 117, 120.
Hartogs 42, 90.
Heath A. E. 30.
Heath T. L. 21.
Heiberg 82, 114.
Heine 107.
Hensel 90.
Hermite 79.
Hesse 55, 61.
Hessenberg 90.
Hettner 90.
Heisemann 123.
Hilb 90.
Hilbert 44, 84, 100.
Hjemslev 103-104.
Hölder 90.
del'Hôpital 48.
Hudde 93.
Huntington 32.
Hunyady 98.
Hurwitz 90.
Huygens 124.

Jacobi 59.
Jacobsthal 90.
Jadanza 30.
Jacobi 3.
Jahnke 90.
Johnston 64.
de Jonquières 57.
Jordan 112.
Juel 101, 103.
Jung 91.

Karpinski 63.
Keplero 63.
Kikuchi 31-32.
Killing 43.
Kirkmann 78, 128.
Klein 99, 100.
Kneser 91.
Koebe 91, 112.
Knudsen 95.
Königsberger 12.
Kötterisch 85.
Korn 91.
Kronecker 79.

Lagrange 2, 51, 103, 120.
Lahire 32.
Lambert G. 3.
Lamberti L. 3
Lampe 91.
Landau 91.
Landis 88, 89.
Langevin 117.
Laplace 85, 117.
Lauricella 39, 44.
Lebesgue 18, 87, 110, 111.
Legendre 42, 88.
Leibiniz 30, 35, 63, 79, 93.
Levi E. E. 16, 38, 45.
Levi-Civita 43, 44.
Leopardi 75-76.
Liapounoff 127.
Libri 64.
Lichtenstein 91.
Lie 43, 79.
Lindberg 42, 45.
Lindemann 52, 91.
Lipschitz 18, 43.
Littré 69.
Loewy 83.
Lombardi 4.
de Lomberg 93.
London 127.
Lorentz 29
Lorenzo il Magnifico 70.
Loria 12, 25, 38, 64, 76, 77, 79, 81, 82, 85, 89, 91, 92, 93, 38, 102, 104, 112, 114, 115, 123, 128
Loschi 3.
Love 117.

Digitized by Google

Lüroth 57, 58.
Lugli 3.

Macfarlane 77-78.
Machiavelli 74.
Maclaurin 17.
Maffei 4.
Mai 75.
Maire 98
Malvezzi 1.
Manfredi 1, 51.
Mannheim 122, 128.
Marcolongo 22, 29, 116, 117, 118, 119.
Marianini 1, 5.
Marsili 1.
Massimiliano d'Austria 4.
Mathieu 88.
Matteucci 5.
Max well 117.
Mayer 122.
Medici 71.
Melzi 3.
Menabrea 25, 26.
Menge 82.
Mercer 91.
Mertens 91.
Michnik 94.
Miller 78-79.
Minkowski 94.
Mittag-Leffler 34, 36.
Mohrmann 91.
Monge 79.
Morera 88.
de Morgan 78.
del Monte 64.
Muir 31.
Montz 91.
Morrich 96.

Netto 128.
Neumann 20.
Newton 64, 79, 93, 103, 119.
Nicoli 11.
Nicomede 103.
Nobili 4.
Noevius 91.

d'Ocagne 121-123.
Orlando 33.
Osgood 88.
Onghtred 80-81.
d'Ovidio 39.

Pacioli 69.
Padoa 16.
Paleocapa 4.
Palomby 29.
Pandolfi 70.
de Paolis 102.
Paolucci 3.
Paradisi 3.
Pascal A. 97-99.
Pascal B. 59.
Pascal C. 97.
Pascal E. 39, 111.
Pasch 100.
Peacock 78.
Peano 49, 108, 117, 118.
Peri 3.
Perizolo da Pisa 96.
Petersen 103.
Petrocchi 65.
Pfeiffer 90.
Picard 18, 112, 113, 128.
Pincherle 39, 46, 51.
Pittarelli 65.
Pivano 36.
Platone 62.
Plücker 55, 56, 59, 60.
Poincaré 34, 36, 42, 79, 85 112, 113, 127.
Poinsot 120.
Poisson 24.
Prati 9.
Pseudo Tolomeo 95.

Quirici 3.

Rangone 1,2.
Rangoni 3, 4.
Rava 9.

Digitized by Google

Razzaboni 5-6-7.
Re 3.
Réaumur 124.
Rey Pastor 99, 102, 102, 112, 114, 115.
Riccardi 2, 5, 6.
Riccati 51, 122.
Ricci C. 65, 69, 70, 72, 76.
Ricci L. 3.
Riccò 7.
Richardson 88-89.
Riemann 44, 61, 87, 101, 102, 108, 109, 110 112, 115.
Riesz 85.
Rigutini 65, 68.
Rohrberg 103.
Roberval 32, 124.
Rolle 48.
Rosati 15.
Rossi 3.
Rothe 91.
Ruffini F. 6.
Ruffini G. 68.
Ruffini P. 2, 3, 4, 20.
Russell 89.

Sabatini 10.
Saint-Venant 23, 24, 117.
Salimbeni 4
Salkowski 91, 123, 126.
Salmon 52
Sarton 30, 96.
Scamozzi 72
Schell 123-126.
Schmidt 44, 85, 91.
Scholz 98
Scottky 91
Schreiber 123
Schrutka 91
Schur 91
Schwarz 90, 112
Seely 95
Segre 101
Selvatico 73
Serlio 69
Simon 21, 91
Smith D. E. 31, 63, 95
Smith J. H. S. 78
Soli 3
Somigliana 27
von Staudt 101, 102
Steiner 61, 79, 113
Steinitz 91.
Stephanos 58
Stirling 88
Stokes 120
Strozzi 72
Suter 62
Sylvester 78, 79

Tacchini 6, 7
Tartaglia 128
Tasso B. 71
Tasso T. 71
Taylor 45, 47, 48, 49, 88
Texeira 81-82
Terradas 112
Testa 3
Thabit ibn Kurras 62
Tommaseo 65, 67, 68
Thomson 24
Tivaroni 3
Todhunter 78
Toeplitz 91
Torelli G. 39, 107-111.
Torelli R. 13, 33
Tramontini 4
Trudi 107

Vacca 2, 7
Vacca G. 21
Vaccari 3
Valdrighi 3
Valerio 63
la Vallée Poussin 87-8, 110
Vasari 71, 74, 76
Vecchi 4
Veneri 3
Veneroni 104-107
Venturi 1, 3, 4
Venturini 3

Digitized by Google

Vernier 63
Vessiot 112–113
Vieta 79
Vignola 69
da Vinci 66, 67, 69, 96, 128
Viriglio 64
Vitali 110
Viterbi 33–37
Vitruvio 69
Vivanti 17, 18, 20, 33, 39, 46, 79–80, 83, 85, 88, 110
Viviani
Voigt 24
Volpi 8
Volterra 19, 27, 29, 37 39

Wallis 31, 63
Watson 88–89
Weierstrass 42, 45, 79, 91, 107, 115.
Wiaker 88
Wieleitner 92–93.
Wrinch 30

Young 24

Zabaglia 72
Zanotti 1, 75, 76
Zermelo 107, 110
Zeuthen 21, 57, 62, 103
Zecchi 3

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
Serie II. Vol. I. Fasc. I — Gennaio-Marzo Anno XX. 1918

Notizie su la Facoltà di Scienze Matematiche

DELLA R. UNIVERSITÀ DI MODENA

RACCOLTE DAL

Prof. Ettore Bortolotti

Periodo anteriore alla invasione francese.

L'impulso dato al rinnovamento delle scienze dall' « Istituto » che in tutto il 1700 rese Bologna famosa in ogni parte del mondo civile, si estese, nell'ultimo scorcio del secolo, anche a Modena ed agli stati estensi, dove si introdussero e si volgarizzarono, insieme col gusto degli studi scientifici, gli ordinamenti meglio atti a secondarlo.

I cittadini più cospicui per ingegno, per casato, o per censo, emulando i Manfredi, i Zanotti, i Marsili, i Malvezzi, raccolsero in private accademie gli uomini più preclari e gli ingegni più promettenti, e si fecero essi stessi cultori appassionati, se non eccelsi, delle più severe discipline.

Sorsero così, accanto all'antica accademia dei Dissonanti, fondata per servire di campo a poetiche gare, quella del March. Foschieri, dove si leggevano memorie storiche filologiche e giuridiche, e l'altra più importante, del March. Gherardo Rangone esclusivamente dedicata alle Scienze Fisiche e Matematiche (1). Ed anche nella Corte Ducale penetrò lo spirito di rinnovamento civile, ond'era informata quella generazione di riformatori, inducendo i governanti a profonde riforme, anzi al completo rinnovamento delle istituzioni scolastiche.

(1) Il Prof. G. B. Venturi che ne fu membro, ci ha lasciato nella « *Vita di G. Rangone* » un catalogo assai particolareggiato delle Memorie lette. Erano ad essa ascritti 12 soci, i quali avevano il premio annuo di una medaglia d'oro di 50 zecchini. Tutte quelle accademie furono più tardi compendiate nella *Ducale Accademia di scienze lettere ed arti.*

Digitized by Google

L'occasione propizia a tale rinnovamento fu data dalla soppressione dei Collegi, che la compagnia di Gesù aveva in Modena, in Reggio, Carpi, Novellara e Mirandola per la quale ad un tempo si privava lo stato di un insieme ben organizzato di istituti di educazione, e si impinguava l'erario di un cospicuo patrimonio. Il Duca Francesco III, con chirografo dell'8 ottobre 1773, destinava questo patrimonio alla restaurazione della Università, la quale fu « elevata per numero e varietà di insegnamenti, per copia « di mezzi, per saviezza di ordinamenti a tal punto, da disputare il primato « alle altre università italiane » (2).

Al Marchese Gherardo Rangone che « prima come capo del magistrato « degli studi, poscia come ministro dell'interno fu la mente ordinatrice della « rinnovata Università » (3) è dovuto l'ordinamento, prevalentemente scientifico, direi quasi matematico, degli studi.

Base comune a tutte le classi, (facoltà) universitarie, era il Biennio Filosofico, dove si impartivano con larghezza di vedute e serietà di metodo, i principii fondamentali delle metematiche superiori; ed alla fine di questo, prima di essere ammessi alle classi, i candidati dovevano dare pubblico saggio, sostenendo dispute, e presentando proposizioni e problemi di matematica e di meccanica (4).

Il savio ecclettismo derivante da questo solido fondamento matematico della coltura superiore (comune in parte anche alle scuole gesuitiche) spiega le singolari attitudini che i migliori intelletti potevano assumere, e che a noi, altrimente educati, sembrano paradossali.

Vediamo in fatto: un lettore di teologia, il padre O. Gherli, dare alla luce un corso di matematiche che il Lagrange giudicava essere « il più completo fino allora pubblicato » (5);

un dottore in legge: P. Cassiani, improvvisato professore di analisi matematica, sviluppare e coordinare in corpo di dottrina e, primo in Italia, insegnare dalla cattedra le ultime teorie di Lagrange sulle equazioni algebriche, allora quasi sconosciute anche fuori d'Italia, formando, alla sua scuola, scolari come Paolo Ruffini e Pietro Abbati Marescotti; e passare poi,

---

(2) Cfr. VACCA. Cenno Storico, pag. 8.

(3) P. RICCARDI. Cenni Storici e Biografici intorno allo studio e ai culturi delle Scienze Fisico-Matematiche... (Mem. Acc. di Modena, Serie III, Vol. III.)

(4) V. P. es. La Biografia di BARALDI nelle Notizie Biografiche in continuazione della Bibl. Modenese, Vol V, pag. 278.

(5) Cfr. P. RICCARDI, loc. cit.

Digitized by Google

con eguale successo, alle cattedre di Geometria Descrittiva e di Idrodinamica nella Scuòla Napoleonica di Artiglieria e Genio (6);

un dottore in lettere e filosofia: A. Fontanelli, coltivare le scienze esatte ed applicate, e diventare generale nell'esercito napoleonico, ministro della guerra nel regno d'Italia;

ed una pleiade di professionisti: medici, come l'Araldi ed il Ruffini, uomini politici, come il Rangoni, il Marescotti, il Ricci, letterati come il Paradisi, scrivere memorie di matematiche, e taluno eccellere fra i migliori geometri dell'epoca.

Periodo Napoleonico.

Fra la eletta schiera di uomini dotti nelle scienze positive nelle giuridiche nelle amministrative, che la Università Modenese aveva educati od accolti, trovò Napoleone uomini di Stato, funzionari e generali per la Repubblica Italiana e per il Regno Italico. Nessun'altra regione d'Italia potè fornirne in sì gran copia. Ricordiamo, fra i più noti; i ministri di Stato: Veneri Antonio (tesoro), Vaccari Luigi (interno) Fontanelli Achille (guerra e marina) Luosi Giuseppe (giustizia), Testi Carlo (esteri), cui dobbiamo aggiungere: Rossi Luigi (segretario di Stato per la Pubblica Istruzione) e Ricci Lodovico (delle finanze nel Direttorio della Cisalpina);

i magistrati e legislatori: Valdrighi Luigi (della Consulta di Lione, del Consiglio degli uditori, procuratore generale della corte di cassazione), Lamberti Giacomo (della consulta legislativa, prefetto e senatore del Regno), Lamberti Luigi (della consulta di Lione, dell'Istituto, del Collegio dei Dotti), Venturini (matematico, ministro Presidente in Svizzera), Venturi G. B. (del corpo legislativo, del Collegio dei Dotti), Loschi Lodovico (del corpo legislativo), Quirici Pietro (giudice, del Collegio dei Dotti)...;

i professori: Ruffini, Jacopi, Baccelli, Cerretti, Fattori, Venturi, Bolognini, (ingegnere in capo del dipartimeno del Crostolo), Soli, (architetto), Filippo Re (agronomo), Paradisi (Senatore, e pres. del Senato, dirett. gen. di acque e strade, della consulta di Lione, del Collegio dei Dotti, presidente dell'Istituto)...;

i generali: Fontanelli, Zucchi, Cavedoni, Calori, Peri, Paolucci.

Infine ricorderemo che lo stesso Melzi (presidente della Repubblica Italiana) aveva fatto gli studi a Modena (7).

(6) V. *l'Elogio di L. Rangoni.*

(7) Cfr. TIVARONI. *L'Italia durante il dominio francese.* Tomo I pag. 186.

Digitized by Google

Benchè, nel periodo Napoleonico, Modena fosse privata della sua Università, ridotta a Liceo, gli studi di Matematica Superiore non ne ebbero nocumento, anzi presero maggiore vigore, per la istituzione della celebre Scuola di Artiglieria e Genio, e pel trasporto in Modena della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL.

Si trovarono così qui riuniti in buon numero cultori fra i più rinomati di scienze esatte; ci basti il menzionare: Paolo Ruffini, Paolo Cassiani, Pietro Abbati Marescotti, Antonio Cagnoli, Giuseppe Tramontini, Carlo Berfereri, Gian-Francesco Cremona, Gaetano Barbieri, Luigi Rangoni, e, per le matematiche applicate:

Antonio Caccianino, Leopoldo Nobili, Pietro Paleocapa, Michele Araldi, Giuseppe Maffei, Ruggiero Bidasio, Paolo Calori, Giambattista Venturi, Leonardo Salimbeni, Giuseppe Vecchi, Antonio Lombardi.... i quali, costituirono in Modena, uno dei più cospicui centri di coltura matematica d'Italia.

Periodo della restaurazione Austro-Estense.

Caduto il primo Regno Italico, e restaurata in Modena la dinastia Austro-Estense, l'Università Modenese fu riaperta (a. 1815) dal nuovo Duca, che richiamò in vigore le costituzioni di Francesco III (8).

Rettore della rinnovata Università fu il sommo matematico Paolo Ruffini, il quale ottenne che a Modena fosse conservata anche la sede della Società Italiana delle Scienze.

Ma, dopo i moti del 1821, ragioni prevalentemente politiche indussero il Sovrano ad istituire un Convitto Matematico, detto Istituto dei Cadetti Matematici Pionieri di Modena. « Fu organizzato sul sistema delle scuole Tede-
« sche, dall'arciduca Massimiliano d'Austria, e lo si può dire un Istituto
« precursore delle nostre scuole di Applicazione per gli Ingegneri.

« L'orario delle Scuole era pesantissimo, i giorni festivi erano dedicati
« agli esercizi militari, i mesi consueti di vacanza si impiegavano in rile-
« vamenti planimetrici ed altimetrici in città ed in campagna, in piano ed
« in monte.... I professori erano valentissimi, amavano l'istituto e con ogni
« lor possa cercavano di ottenere ottimi frutti. E ottimi li ottennero, poichè

---

(8) Cfr. *Collezione Generale delle leggi per gli stati Estensi*, Tomo I (1814) pag. 102, Tomo II (1815) pag. 4.

Digitized by Google

« gli allievi della Scuola dei Pionieri di Modena si sono sempre fatti, do-
« vunque, un grande onore in tutti i rami della Scienza dell'Ingegnere.... (9).

Dopo i rivolgimenti politici del 1848, sciolti i convitti e restaurata in Modena l'Università, fu per cura di una deputazione di dotti compilato un nuovo Piano di Studi che rimase in vigore fino all'anno scolastico 1859-60.

Il corso filosofico preparatorio di due anni, nel quale erano conservati buoni studi di matematica, mediante un esame di avanzamento, apriva l'adito alle classi universitarie. Quella Fisico-Matematico, comprendeva quattro anni di studio, dava lauree di dottore in Matematica ed in fisica e diploma di ingegnere civile, ed era notevole per valore di insegnanti e per numero ed opportunità delle cattedre; di queste ultime alcune (come la storia della matematica) sono ancora oggi vanamente desiderate e richieste presso le nostre Facoltà Matematiche!

Comprendeva anche un corso di due anni (oltre quelli del biennio filosofico) per Periti Agrimensori.

Periodo successivo al 1859.

Il governo dittatoriale, istituito nelle nostre provincie dopo la partenza degli Austro-Estensi, con decreto 5 luglio 1859, nominava una commissione, sotto la presidenza del prof. Stefano Marianini, coll'incarico di proporre un piano di ristabilimento della Scuola dei Matematici Pionieri. Il piano fu compilato e proposto, appena un mese dopo, e contemplava tre rami di studi: per gli ufficiali del Genio, per quelli di Artiglieria, per ingegneri civili, ed era molto saggiamente concepito; ma gli avvenimenti politici non ne permisero l'attuazione (10). Modena perdette così l'occasione di avere una Scuola politecnica, che avrebbe continuato la tradizione di quella Napoleonica, e sarebbe stata fra le prime in Italia, unica, allora, nella nostra regione.

Rimasero tuttavia, nella nostra Università, i due ottimi corsi di Fisico-Matematica, di Agrimensura, che davano laurea di dottore e diplomi di Ingegnere civile e di Perito agrimensore (11).

La legge Matteucci del 1862, fece passare Modena nel novero delle Uni-

---

(9) CAVANI F. *Elogio storico del prof. Cesare Razzaboni* (Bologna 1899) pag. 13, 14. La Storia di quell'Istituto fu scritta da P. Riccardi (cenno storico sull'Istituto dei cadetti matematici Pionieri di Modena, Modena 1864).

(10) Cfr. F. CAVANI, loc. cit. pag. 21, 22.

(11) Cfr. *Annuario Scolastico della R. Università di Modena per l'anno Accademico* 1860-61.

Digitized by Google

versità Secondarie, nel riguardo degli stipendi dei professori, ma non già in quello della estensione e serietà degli studi. Lasciò in particolare, i corsi completi per la laurea in matematica, e pel diploma di perito, e, con apposito decreto, stabilì le norme per il rilascio del diploma d'ingegnere ed architetto ([12]).

Ma i modenesi non seppero approfittare degli uomini, degnissimi sotto ogni riguardo, che qui avevano, per occupare, le cattedre nuovamente istituite, e, mentre era direttore del nostro osservatorio astronomico Pietro Tacchini, lasciavano vacante la cattedra di astronomia e meccanica celeste; e, mentre erano qui professori Cesare Razzaboni, Ferdinando Ruffini e Pietro Riccardi, non trovavano cui affidare gli insegnamenti di Analisi e Geometria superiore, di Fisica matematica e di Topografia!

Così avvenne che i corsi del quarto anno per la laurea in metematica, rimanessero vuoti, non già di scolari, ma di insegnanti, e che quetamente quasi clandestinamente, il corso per la laurea in matematica, scomparisse dagli annuari della Università Modenese!

Rimaneva quello per il Diploma di Ingegnere civile, ma, nell'anno 1866-67, non vediamo più segnato il quarto anno di corso; e sappiamo poi, per altra strada ([13]) che un'ordinanza ministeriale del 25 settembre 1866 aveva soppresso tutte le cattedre relative.

Due anni prima era stato tolto anche il corso di agrimensura, cosicchè l'insegnamento della matematica nella nostra Università, era definitivamente ridotta al solo ufficio della preparazione per l'ammissione alle Scuole di applicazione per gli Ingegneri, o pel secondo biennio di facoltà più fortunate.

Quelle successive soppressioni colpivano la nostra facoltà nel tempo in cui essa aveva raggiunto maggiore prosperità e pareva avviarsi a più sicuro avvenire, e di fatti la popolazione scolastica dal 1859 in poi era andata continuamente aumentando: pel solo corso per gli ingegneri la media annua dell'ultimo quinquennio di corso completo era stata di 124 iscritti, ed accennava a salire ulteriormente ([14]); il corpo accademico, per numero e valore degli insegnanti, era degno di stare al paro con quello delle migliori fa-

---

([12]) Cfr. *Annuario scolastico per l'a. 1862-63*, pag. 6, 28, 29.

([13]) Cfr. CAVANI. F., loc. cit.

([14]) La media annua per ogni anno di corso era di circa 31 scolari. La facoltà di Medicina che in quello stesso tempo non arrivava ad avere 14 scolari per ogni anno di corso, fu conservata per intero (e fu bene).

Digitized by Google

coltà del Regno, e la fama della nostra Scuola di matematica era assai buona, sia presso le autorità, che presso il pubblico. I giovani qui leureati trovavano facile e proficuo collocamento, sia nelle amministrazioni dello Stato che nelle private aziende; ingegneri e topografi modenesi ebbero parte principalissima nei lavori del catasto, nella costruzione delle ferrovie ed in ogni specie di opere pubbliche.

Dalla nostra Università sono usciti Pietro Tacchini direttore dell'Osservatorio e fondatore dell'Ufficio Centrale del Collegio Romano, Annibale Riccò, direttore dell'Osservatorio Astronomico e Geofisico di Catania, F. Cavani, direttore della Scuola Superiore di Agraria in Bologna; ed, infine, l'attuale Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Bologna, ebbe da Modena il fondatore Cesare Razzaboni, l'attuale Direttore S. Canevazzi ed il nucleo più numeroso degli insegnanti.

Soggiungeremo che i tempi sarebbero stati estremamente propizii alla istituzione in Modena di una Scuola Superiore di matematica applicata, poichè tali studi erano allora altrove trascurati, al punto che il Ministero dovette nel 1875 intervenire, dichiarando privo di valore legale il diploma di ingegnere rilasciato dalla Facoltà di Bologna e sopprimendo poi addirittura in questa Università il corso pratico per gli ingegneri, ristabilito solo più tardi con la fondazione della Scuola di Applicazione ([15]).

([15]) Questo avvenne nel 1877, 10 anni dopo che a Modena era stato soppresso il corso completo di matematiche.

È singolare la rassegnazione, che par quasi condiscendenza, delle nostre autorità accademiche e cittadine alle successive, ingiustificabili, mutilazioni della scuola matematica modenese.

Non risulta che fosse mai elevata protesta alcuna, e che nulla si sia mai fatto per rimediare a tale danno: La petizione di professori della R. Uuiversità di Modena agli onorevoli signori deputati ed al signor Ministro della P. I. del 5 giugno 1867, fatta proprio quando la soppressione dell'ultimo anno di corso era ancora fresca e facilmente riparabile, non ne fa il menemo cenno, ed il Vacca (per tanti altri titoli benemerito del nostro Ateneo) nel suo discorso in occasione del pareggiamento, dopo aver espresso il rincrescimento per non aver potuto istituire la facoltà di Filosofia e Lettere (senza esprimere un analogo sentimento per il completamento di quella di matematica pura) soggiunge espressamente che tornò comodo e gradito il non essere Modena, dal governo centrale, costretta a completare gli studi per la laurea in matematica, poichè ciò evitava un sovraccarico di spesa al Consorzio Universitario.

Il Cavani, nel suo Elogio di Cesare Razzaboni, osserva che « a Bologna vi erano al- « lora persone, per diverse ragioni, contrarie alla fondazione della Scnola di Appli- « cazione per gli ingegneri « e forse era così anche a Modena.

Digitized by Google

Ridotta a due soli anni di studio, privata dell'insegnamento del disegno (che gli studenti dovevano ricercare presso la locale accademia di Belle Arti), negato alle cattedre il sussidio dell'opera degli assistenti, la Facoltà andò mano a mano scemando nel numero degli inscritti, che si ridussero, l'anno 1897-98 a 5 per l'intero biennio. Ma a questo punto ricomincia la fase ascendente: si riacquistano cattedre, si istituisce l'assistentato, si provvede ai locali, si fondano nuovi istituti, la popolazione scolastica di anno in anno si accresce, e già accenna a superare le medie annue che si ebbero nei periodi più fortunati.

Istituzione dell'Assistentato.

Chi ha vissuto nella nostra Scuola sa che l'opera dell'insegnante ufficiale, per quanto illimitata e zelante, produce dal punto di vista dell'applicazione pratica, effetto assai scarso se non è integrata da quella dell'assistente. Questi ha cura speciale delle esercitazioni analitiche, del disegno delle tavole, di tutto ciò che può rendere agevole agli scolari l'uso dei metodi e dei mezzi che vengono loro apprestati nell'insegnamento ufficiale. È, più direttamente ed intimamente a contatto coi giovani, più facilmente ne scopre le manchevolezze ed i bisogni; ripete i passi difficili, richiama, volgarizza, semplifica, e rende più palesi i legami fra le varie discipline.

Si comprende dunque quale nocumento abbia recato al nostro studio la mancanza assoluta di assistenti per le cattedre di matematica. La quale, nonostante i replicati voti di facoltà e le insistenze personali degli insegnanti, ha perdurato fino a questi ultimi tempi.

Si incominciò solo l'anno 1900-1901 con l'assistentato volontario. E fu vera furtuna il trovare qui, dove manca il secondo biennio di matematiche pure, giovani cittadini provvisti dei necessari titoli di studio, dotati di soda coltura e di buone disposizioni all'insegnamento, i quali, con rara abnegazione ed encomiabile zelo, dedicarono tutto il loro tempo e spesero le loro fatiche (gratuitamente e con assoluto disinteresse) nell'ufficio di assistente (uno solo per tutte le cattedre!) alla Scuola di matematica della nostra Facoltà.

Questi furono, per l'anno scolastico 1900-1901 il dottore Roberto Volpi, e, per gli anni 1901-1906; il dott. Armando Barbieri. È mio dovere il ricordare qui i loro nomi, poichè l'opera che essi hanno prastata in quel tempo, benchè promossa da voti di Facoltà ed approvata dal rettore, non risulta dagli annuari della nostra Università.

Digitized by Google

L'assistentato onorario preparò la strada a quello ufficiale, che finalmente si ottenne, ad incominciare dall'anno 1906-07, essendo Rettore G. Cesari, e ministro della P. I. l'Onor. Rava, a tanti altri titoli benemeriti (e l'uno e l'altro) della nostra Università.

E la sistemazione definitiva fu data dalla legge Rava del 19 luglio 1909, la quale, assegnando cinque posti nel ruolo degli assistenti alle cattedre di matematica, provvedeva stabilmente, ed in modo del tutto soddisfacente, ai bisogni della nostra Facoltà.

Aula e scuola di disegno.

Un'altra causa del lamentato decadimento dei nostri studi (pur essa felicemente rimossa) era la mancanza dell'aula e della Scuola di disegno.

Gli scolari dovevano, per quell'insegnamento, recarsi alla locale Accademia di Belle arti, e così avveniva che, la lontananza della sede degli studi e la limitazione del tempo in cui l'aula era a disposizione loro favorissero l'apatia e la negligenza, mentre poi l'indirizzo artistico della scuola era allontanato dai fini che più particolarmente sono proprii alla nostra Facoltà.

Per togliere tali inconvenienti, il rettore G. Cesari, fece allestire al primo piano del palazzo degli studi, in tre stanze contigue tolte dai locali lasciati vuoti pel trasporto del gabinetto di Chimica in Sant'Eufemia, un'auletta per lezioni di matematica, un'aula per scuola di disegno, ed una camera dove furono collocati gli scaffali della biblioteca consorziale di matematica, e dei modelli pel disegno. L'arredamento dell'aula, la preparazione e l'acquisto dei modelli e dei gessi pel disegno di ornato e di architettura, si fecero sotto la guida del prof. Prati, il quale, scortato da buon gusto artistico e dalla esperienza professionale, seppe ingegnosamente sfruttare gli esigui mezzi messi a sua disposizione, rendendo presto la scuola atta a funzionare egregiamente, con piena soddisfazione delle autorità e dei giovani. I quali, anche fuor dell'ora di lezione, la frequentano, attendendo ordinati e tranquilli al lavoro, che loro riesce di piacevole occupazione negli intervalli fra le lezioni giornaliere.

La sorveglianza dell'aula riesce facile per la vicinanza della auletta di matematica e della biblioteca, dove spesso si trattengono professori ed assistenti, e, principalmente, per l'indole, per la educazione di modi e per la tradizionale serietà della nostra scolaresca (quasi interamente composta di giovani provenienti dalle provincie di Modena, Reggio Emilia e Mantova)

Digitized by Google

cosicchè non si è mai avuto a lamentare il più piccolo inconveniente, nonostante che non vi sia personale di servizio o di custodia, espressamente adibito alla nostra scuola.

I frutti di quella felice istituzione non tardarono a manifestarsi nell'accrescimento della popolazione scolastica, anzi sorpassarono ogni più lieta aspettativa, rendendo presto i locali inadeguati agli ognor crescenti bisogni. L'auletta di matematica, fatta per una ventina di scolari, dovette (l'anno 1913-14) ospitare fino a 50 giovani, che vi si pigiavano per ascoltare calcolo infinitesimale, la maggior parte rimanendo in piedi tutta l'ora di lezione, e quella di disegno, che non aveva banchi per più di 28 studenti, dovette (nello stesso periodo) ospitarne fino a 64, cui si dovette provvedere con ripieghi, certo non confacenti al decoro degli studi ed al profitto dei giovani. Ora la guerra ha spopolato le scuole ed ha tolto il disagio della ristrettezza dei locali; ma il numero delle iscrizioni tuttora ci dice che la spinta ascendente non si è affievolita : tornata la pace , si accalcheranno nelle nostre scuole nuove e più numerose generazioni di giovani cui bisogna provvedere.

Di ciò persuaso il prof. A. Coggi, nel tempo del suo rettorato, elaborò un progetto per la costruzione, in locale direttamente sottostante quello fino allora occupato dalle scuole di disegno e matematica (concessoci a generose condizioni del collegio S. Carlo), di una nuova e più ampia scuola di disegno, la quale, congiunta alle primitive stanze opportunamente sistemate ad uso di aule per la matematica, potesse nell'insieme costituire una sede decorosa e comoda, atta ad assicurare libera espansione al rifiorente studio matematico.

Il progetto, dal Coggi energicamente propugnato, aveva già avuto un principio di esecuzione, quando il ministero dell'Istr. Publ. accettò il carico dell'affitto da corrispondere al Collegio S. Carlo per i locali da adattarsi ad aula di disegno, e anche pel fatto che già erano firmati i contratti di appalto dei lavori murari. Il Coggi lasciò in quell'epoca il rettorato. Ma la sospensione non fu di una lunga durata, poichè il Pro-Rettore Sabbatini, secondando le rinnovate insistenze della Facoltà, riusciva a portare a termine la costruzione della nuova grande aula di disegno.

L'opera è stata completata nel modo più degno, dall'attuale rettore prof. Colombini, il quale ha saputo (in questi tempi !) trovare i mezzi necessarii per dotare la nuova aula di opportuni sistemi di riscaldamento e di illuminazione, e per trasformare l'antico locale, in modo da ricavarne due belle aule per lezioni di matematica, ed una comoda stanza per la

Digitized by Google

biblioteca consorziale di matematica, ed ha poi con savie premure, sollecitato i lavori, in modo da poterli condurre a termine, nel corso dell'anno accademico senza turbare l'andamento delle lezioni.

Biblioteca Consorziale Matematica.

La lunga permanenza nella nostra città di istituti superiori di matematica, di insigni accademie e di buone società Scientifiche ha arricchito le biblioteche cittadine (Universitarie, Estense, dell'Accademia) di un ricco materiale, comprendente opere classiche, antiche e moderne, opuscoli, collezioni di riviste ed atti accademici, che insieme costituiscono una Biblioteca Matematica, ben degna delle illustri tradizioni del nostro studio. Ma, a tenere in corrente le pubblicazioni periodiche, ed alla compera delle più importanti opere nuovamente uscite, non bastavano gli assegni alle varie biblioteche, i quali debbono provvedere anche a tante altre materie e sono in complesso piuttosto scarsi. Il nostro benemerito Consorzio Universitario, ha perciò assegnato alla Scuola matematica un sussidio annuale, mediante il quale si è potuto gradatamente acquistare un certo numero di opere e di periodici, riguardanti le matematiche superiori, e di indirizzo prevalentemente pedagogico, metodologico o didattico in modo da poter essere più immediatamente utili agli insegnanti ed agli allievi della nostra scuola.

Si viene così costituendo una piccola Biblioteca Matematica Consorziale, cui non sono mancati i contributi dei cultori delle scienze con l'omaggio delle loro pubblicazioni, ed i doni di libri ed opuscoli di insegnanti: cospicuo fra gli altri quello del prof. F. Nicoli, presidente della locale Accademia di Scienze lettere ed arti, già professore di Geometria Descrittiva nella nostra Facoltà.

L'uso di questa Biblioteca, per ora riservato a professori, assistenti ed allievi della scuola, sarà regolato da apposito statuto, il quale mira a raccogliere i cultori di scienze matematiche in un modesto Istituto Matematico che serva a coordinare le energie e gli sforzi per un più efficace avviamento dei giovani, ed un più intimo legame fra i vari ordini di scuole ed i vari rami delle matematiche discipline.

Digitized by Google

Geometria

L. BRAUDE. *Les coordonnées intrinsèques. Théorie et applications.* Colléction Scientia, N. 34. Paris Gauthier-Villars, Mars 1914, p. 99.

Benchè gran parte della nostra geometria sia (esplicitamente od implicitamente) basata sopra l'uso di coordinate cartesiane, pure da tempo si è riconosciuto che le relative equazioni esprimono, non proprietà intrinseche agli enti rappresentati, ma relazioni fra questi e gli elementi di riferimento. Da ciò le proposte di sostituire alle equazioni classiche altre in cui entrassero altri elementi, quali (per limitarsi al caso delle curve piane) l'arco e l'inclinazione della tangente sopra una retta fissa, oppure l'arco ed il raggio di curvatura, oppure i raggi di curvatura della curva proposta e della sua evoluta. Di egual tipo è la così detta « equazione magica » della tangente, ove entra l'espressione della distanza di tal retta dall'origine in funzione dell'angolo che essa tangente forma con una retta fissa, e l'« arcuide », inviluppo delle rette condotte parallelamente alle tangenti di un curva dai punti dell'asse delle ascisse che stanno dall'origine delle coordinate ad una distanza eguale agli archi compresi fra i relativi punti di contatto e un'origine fissa. Questi vari ausiliari sono definiti, studiati e largamente applicati nell'opuscolo in questione, il quale può considerarsi come un utile complemento alla *Geometria intrinseca* del CESÀRO, quantunque non abbia sempre le doti di eleganza e lucidità che rendono così piacevole la lettura degli scritti del nostro compianto connazionale.

Questo volumetto scritto in francese da un giovane matematico tedesco; ornato del ritratto di un illustre geometra italiano (il CESÀRO) e dedicato ad un notissimo professore tedesco (il KÖNIGSBERGER); finalmente pubblicato mentre si riuniva a Parigi la « Commissione internazionale per l'insegnamento matematico » è la più lampante manifestazione di quella ampia, cordiale e feconda collaborazione nel campo delle scienze esatte che la guerra delle nazioni ha bruscamente troncato e che forse non si presenterà mai più, con un danno per la scienza tutta che sarebbe difficile valutare neppure approssimativamente.

G. L.

Digitized by Google

E. CIANI. *Il metodo delle coordinate proiettive omogenee nello studio degli enti algebrici.* 8° gr. p. VIII+215. Pisa, Spoerri, 1915. (Prezzo L 10).

Questo libro, dedicato agli studenti del 2° Corso universitario che si volgono agli studi di Matematiche pure, fa seguito alle « *Lezioni di Geometria proiettiva ed analitica* » dello stesso A. (Pisa, Spoerri, 1912), di cui è apparsa in questo Bollettino una recensione del compianto prof. R. Torelli, e di quelle è un opportuno complemento. Esso, oltre che proporsi lo scopo di fare acquistare ai giovani dimestichezza e padronanza del metodo delle coordinate proiettive omogenee, può riguardarsi come un utile avviamento a studi più alti di geometria, e in particolare a quello della teoria invariantiva delle forme algebriche, nella quale l'A., segnatamente per le forme ternarie quartiche, ha portato coi suoi lavori un contributo notevole. Gli argomenti trattati non si spingono oltre il campo quadratico e il loro sviluppo procede in modo che ne risulta, fin quanto è possibile, un certo parallelismo fra il campo binario, ternario e quaternario; il che contribuisce a dare al disegno dell'opera armonia ed eleganza di linea. Altro pregio del libro è la chiarezza e la sobrietà dell'esposizione, per cui la lettura ne riesce facile e spedita.

Un rapido sguardo al suo contenuto darà un'idea chiara del modo come gli argomenti sono svolti e raggruppati.

I cap. I e II si riferiscono al campo binario. Introdotto il concetto di coordinate proiettive omogenee di un punto su di una punteggiata e in generale di un elemento su di una forma fondamentale di prima specie, vengono stabilite le equazioni e risolti i problemi inerenti alla proiettività fra questi enti (elementi uniti, involuzione, forme canoniche della proiettività, ecc.). Si studia poi la forma binaria quadratica, e si pone il primo concetto di invariante, mostrando che il discriminante della forma è un invariante; si ottiene poi l'involuzione con la corrispondenza polare rispetto alla forma e si dànno di questa le rappresentazioni canoniche. Procedendo allo studio del sistema di due binarie quadratiche, si trova il significato geometrico dell'annullarsi del loro armonizzante, e si dimostra che lo jacobiano delle forme è una forma armonica ad entrambe. Si ritrova poi l'involuzione come individuata ad un fascio di forme binarie quadratiche e si dà un cenno della rappresentazione simbolica.

I cap. III e IV sono dedicate al campo ternario.

Nel cap. III, esposti i primi concetti di coordinate proiettive omogenee nel piano punteggiato e nel piano rigato e risolti i problemi elementari di

Digitized by Google

Geometria analitica nel piano, si suppongono i due piani sovrapposti, e, con la consueta scelta degli elementi di riferimento, si trova la condizione analitica di appartenenza di punto e retta, dalla quale, in modo rapido ed elegante, vien dedotta la legge di dualità nel piano. Segue poi una trattazione analitica della proiettività fra due piani (collineazione, reciprocità) e la risoluzione dei primi problemi ad essa inerenti (elementi uniti, forme canoniche, ecc.).

Il cap. IV tratta della forma ternaria quadratica. Dimostrato come una tal forma, uguagliata a zero, dia la rappresentazione analitica di una conica, si espone la teoria della polarità rispetto ad essa. Indi si considerano le coniche dei punti e delle rette incidenti in una reciprocità piana e si dimostra come, nel caso involutorio, esse coincidano. Introdotto poi il concetto di punti ciclici del piano, si espone rapidamente la teoria dei fuochi della conica in relazione ad essi. Segue poi lo studio del sistema di due forme quadratiche e, dall'esame dell'equazione ottenuta uguagliando a zero il discriminante di una forma del fascio da esse individuato, si deducono le condizioni perchè le due coniche vengano in vario modo a toccarsi. Si considerano poi il covariante e il contravariante armonico delle due forme e si studia il significato geometrico dell'annullarsi di due invarianti simultanei. Vengono infine dimostrate le proprietà della schiera di coniche omofocali.

I cap. V e VI si riferiscono al campo quaternario.

Nel cap. V, risolti dapprima in coordinate proiettive omogenee i problemi elementari di geometria analitica dello spazio, dalla condizione analitica di appartenenza di punto e piano si deduce la legge di dualità nello spazio e si studiano le proiettività spaziali (omografia, reciprocità) come sostituzioni lineari omogenee in quattro variabili.

Il cap. VI è dedicato allo studio della forma quaternaria quadratica. Dimostrato che, uguagliando a zero una tal forma, si ottiene la rappresentazione analitica di una quadrica, si studia la polarità rispetto ad essa. Si prendono poi a considerare le quadriche dei punti e dei piani incidenti in una reciprocità dello spazio e si dimostra come il caso involutorio si abbia in due specie di reciprocità, (sistema nullo, polarità). Si dànno poi le forme canoniche della quaternaria quadratica e si dimostra che tutte le quadriche proprie sono proiettivamente identiche, osservando opportunamente come, per il rigore dell'affermazione, sia necessario ampliare il concetto di collineazione spaziale in quello di sostituzione lineare quaternaria a coefficienti complessi qualsiasi. Segue un cenno del cerchio immaginario all'infinito

Digitized by Google

e dell'assoluto dello spazio e si ritrovano, in relazione ad esso, le proprietà degli ombelichi e delle sezioni circolari delle quadriche. Il capitolo termina con uno studio sui fasci e schiere di quadriche e sui sistemi di quadriche omofocali.

I cap. VII e VIII sono dedicati allo spazio rigato.

Nel cap. VII, rappresentata la retta mediante le sue coordinate plückeriane, e risolti i primi problemi (condizione d'incidenza, rappresentazione del fascio, della stella, ecc.), si studia il complesso lineare, il sistema nullo ad esso associato ed i sistemi lineari di complessi ∞^1, ∞^2, ∞^3, ∞^4.

Del complesso quadratico l'A., con opportuno senso di misura, si limita a considerare (cap. VIII) alcuni esempi, e cioè: il complesso tetraedrale, del quale dimostra le proprietà più eleganti, la sua generazione mediante proiettività binarie, ternarie, quaternarie, ecc.; il caso particolare metrico dato dal complesso degli assi, ed infine il complesso delle tangenti ad una quadrica.

In fine di ogni capitolo trovasi una raccolta di esercizi bene scelti e graduati.

Da quanto si è brevemente esposto si può ben concludere che questo libro, insieme alle lezioni già citate, meriti di occupare un posto onorevole fra i buoni trattati di Geometria analitica e proiettiva.

CARLO ROSATI.

Analisi infinitesimale.

G. FUBINI. *Lezioni di analisi Infinitesimale.* Seconda edizione. Società Tipografica Editrice (S. T. E. N), 1916; 8° gr. VIII-541 (Prezzo L. 14).

Di questo notevole volume abbiamo già parlato lungamente quando uscì la prima edizione (v. questo *Bollettino*, I Ser., T. XVI, p. 25-36). La nuova non porta essenziali modificazioni al piano generale: la più notevole di queste è l'avere giustamente premesso la parte di algebra formale al concetto di limite ed alle teorie dell'analisi infinitesimale.

Molti invece i miglioramenti nei particolari della trattazione: si può dire che non vi è pagina che non sia stata ritoccata, ed utilmente ritoccata, onde aumentare i pregi di semplicità e chiarezza che già avevamo lodato nella prima edizione. Rileviamo in particolare due di tali modificazioni specialmente importanti.

La prima riguarda la integrazione delle funzioni razionali. La parte razio-

Digitized by Google

nale dell'integrale si può determinare indipendentemente della decomposizione in frazioni semplici col metodo dei coefficienti indeterminati: solo per determinare la parte trascendente occorre tale decomposizione, che si può così limitare al caso in cui il denominatore abbia solo radici semplici. Tale modo di determinare l'integrale presenta dei vantaggi pratici notevoli: presenta anche il vantaggio teorico, su cui il Fubini non richiama esplicitamente l'attenzione, che la parte razionale viene determinata con sole operazioni razionali. Non credo che questo processo rappresenti una assoluta novità: ricordo su questo proposito una interessante comunicazione di A. Padoa nella Sezione Ligure della Società Mathesis, venuta or sono due anni (v. *Bollettino della « Mathesis »*, T. VII, 1915, p. 37); ma generalmente nei trattati non lo si indica: e bene ha fatto il Fubini a sostituirlo al processo ordinario.

Più interessante è la seconda di tali modificazioni. L'autore, sviluppando ulteriormente idee di cui avevamo già richiamata l'importanza parlando della prima edizione, introduce la nozione di *funzione addittiva di insieme:* se si ha una famiglia di aggregati tale che con due aggregati τ' e τ'' contenga l'aggregato somma, se ad ogni aggregato τ di tale famiglia si fa corrispondere un numero $S(\tau)$ tale che

$$S(\tau' + \tau'') = S(\tau') + S(\tau''),$$

si dice che $S(\tau)$ è funzione addittiva degli insiemi τ. Se è definita una misura degli aggregati τ — indichiamola con $m(\tau)$ — si può definire la derivata in un punto P di tale funzione $S(\tau)$ quale il limite di $\frac{S(\tau)}{m(\tau)}$, quando $m(\tau)$ tende a zero, τ contenendo sempre il punto P: tale derivata, sotto convenienti ipotesi, gode di molte delle proprietà dell'ordinaria derivata. Gli integrali semplici, multipli, curvilinei, ecc. sono tutte funzioni additive d'insieme, quando convenientemente si scelga la famiglia di aggregati; e con opportuna scelta della definizione della misura, hanno per derivata la funzione integranda. Di tale uniformità fa uso abilmente il Fubini per esporre sopra un unico schema la teoria di queste varie specie di integrali e delle loro applicazioni.

Alla numerosa raccolta di esercizi, dà pregio di complemento utilissimo un ben ordinato indice di essi in fine al volume.

E. E. Levi (1).

---

(1) Questa recensione è, per quanto ci consta, l'ultimo scritto del compianto matematico, morto recentemente da eroe sul campo dell'onore; della Sua importante opera scientifica verrà parlato nel prossimo fascicolo di questo *Bollettino*. [G. L.].

Digitized by Google

U. DINI. *Lezioni di analisi infinitesimale*. Vol. II. Calcolo integrale. Pisa, Nistri, 8° gr. P. I, 1909, p. I-XIII, 1-468; P. II, 1915, p. 469-1060.

Il voto da noi espresso, quando annunziammo il primo volume di quest'opera magistrale (Boll. I Ser., T. XI, 1909, p. 57-58), si è, per necessità di cose, in parte avverato. L'illustre Autore dovette accorgersi che troppo si era sviluppata, nel corso di quarant'anni, la scienza che tanto a lui deve, perchè si potesse con sole note a piè di pagina portare il vecchio testo al livello attuale; e perciò questo secondo volume, pur conservando in gran parte i tratti caratteristici primitivi, porta le tracce di un profondo rimaneggiamento, e contiene anche alcuni importanti capitoli completamente nuovi.

Nella P. I l'A. espone la teoria dell'integrazione definita e indefinita, i metodi d'integrazione delle funzioni razionali, irrazionali e trascendenti, la teoria degli integrali impropri, l'integrazione per serie, lo studio degli integrali contenenti un parametro con applicazioni varie, il calcolo delle aree, archi, superficie, curve e volumi, la valutazione approssimata degli integrali, un breve studio degli integrali euleriani, la teoria degli integrali multipli e della loro trasformazione, l'integrazione delle espressioni differenziali a più variabili.

È quasi inutile aggiungere, che i capitoli dedicati agli integrali improprî, all'integrazione per serie ed agli integrali delle funzioni contenenti un parametro sono trattati con cura speciale. Interessanti sono le applicazioni della derivazione e dell'integrazione sotto il segno : deduzione di integrali definiti da altri mediante una o l'altra od ambedue queste operazioni; relazioni varie tra integrali definiti; estensione della formola di FRULLANI:

$$\int_0^\infty \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = f(0)\,lg\,\frac{a}{b} \quad \left(\lim_{x=\infty} f(x)=0,\ a>0,\ b>0\right)$$

e suo uso pel calcolo degli integrali definiti; applicazioni dell'inversione dell'ordine delle integrazioni. L'area d'una superficie curva viene definita come il limite dell'area d'una superficie poliedrica iscritta, le cui facce convergono uniformemente verso i piani tangenti nei vertici; e si dimostra che, se p e q sono finite e continue, ha luogo la convergenza uniforme. Anche il capitolo riguardante il calcolo approssimato degli integrali presenta molto interesse; esposte le varie formole della media, l'A. tratta in esso dei numeri di BERNOULLI, della formola di MACLAURIN-EULERO e di altre formole atte alla valutazione approssimata degli integrali, studiando ampiamente la questione del calcolo dell'errore.

Digitized by Google

Nella P. II l'A., premesse le generalità sulle equazioni differenziali, dimostra l'esistenza e l'unicità dell'integrale d'un'equazione o d'un sistema di equazioni del primo ordine sotto le condizioni di LIPSCHITZ, sviluppa il metodo delle approssimazioni successive di PICARD, studia la continuità e la derivabilità degli integrali d'un sistema considerati come funzioni dei valori iniziali. Segue l'integrazione dei tipi più comuni di equazioni del primo ordine, la teoria del fattore integrante e delle soluzioni singolari, e l'integrazione di alcune equazioni di ordine superiore. Alle equazioni lineari sono dedicati tre lunghi ed importanti capitoli; essi, oltre a quanto si trova d'ordinario nei testi intorno a questo argomento, contengono le ricerche più moderne, in cui l'A. ha avuto larga parte, sulla integrazione delle equazioni lineari per serie di vari tipi e per integrali definiti, e sui valori asintotici degli integrali di certe classi di equazioni lineari, ricerche, le quali, per l'ampia arbitrarietà che vi è nella scelta di certe funzioni ausiliarie, dànno luogo a svariate applicazioni. Si passa poi ad un breve studio dei sistemi di equazioni ordinarie e delle equazioni a differenziali totali ed a derivate parziali. Un capitolo successivo contiene una chiara esposizione della teoria delle equazioni integrali, preceduta da un breve cenno storico. Infine, premesse la definizione e le proposizioni fondamentali della teoria degli aggregati di punti, l'A. stabilisce il concetto di misurabilità di un aggregato, e quello di integrale di LEBESGUE.

G. VIVANTI.

Equazioni integrali.

G. VIVANTI. *Equazioni integrali lineari.* Manuali Hoepli. Milano 1916 (Prezzo L. 4, 50).

Ecco un trattato, ove rifulgono insieme doti di studioso e di insegnante: in piccola mole sono raccolti magistralmente tutti i punti essenziali della teoria delle equazioni integrali, senza che mai il rigore faccia difetto, senza che mai, neanche nelle questioni più delicate, manchi quella chiarezza, quella lucidità così necessarie in un libro. Merito raro di quest'opera è il gran numero di esempi illustrativi.

Riassunti in modo mirevole i principii essenziali della teoria delle funzioni analitiche, delle equazioni differenziali lineari, dei corrispondenti sviluppi in serie di funzioni trigonometriche, sferiche o cilindriche, si dimostra il teorema di HADAMARD per i determinanti, e si riassume la teoria dei divisori elementari. Col metodo dello sviluppo in serie secondo le potenze

Digitized by Google

del parametro indicato abitualmente con λ si risolve l'equazione integrale di VOLTERRA di seconda specie, definendo il corrispondente nucleo risolvente. L'A. studia poi l'equazione di VOLTERRA di prima specie, dedicando particolare attenzione al caso in cui il nucleo $K(x, y)$ si annulla in qualche punto, per $y = x$, e in cui pertanto non si può senz'altro ridurre l'equazione al tipo precedente, e finisce la prima parte con rapidi cenni sui sistemi di equazioni di VOLTERRA.

La seconda parte tratta anzitutto delle definizioni di sistemi di funzioni ortogonali (chiusi o non), ortogonali normali, biortogonali, polari, e dà le proprietà più elementari di tali sistemi. Si studia poi l'equazione di FREDHOLM di seconda specie prima con lo sviluppo in serie di potenze, poi come limite di equazioni lineari. Per i valori di λ che annullano il denominatore della formola del FREDHOLM si studiano le soluzioni della corrispondente equazione omogenea e quelle della equazione associata [ottenuta scambiando il nucleo $K(x, y)$ in $K(y, x)$]. Tali due sistemi di funzioni si provano biortogonali.

Si applicano tali funzioni per lo studio dell'equazione non omogenea nei punti ove è nullo il denominatore della formola del FREDHOLM. Con un procedimento ingegnosissimo si trova la condizione necessaria e sufficiente affinchè non vi siano parametri (così l'A. chiama i cosidetti autovalori), o ve ne sia soltanto un numero finito; e infine si studiano alcune relazioni tra i parametri e le funzioni parametriche relative corrispondenti a un nucleo ed ai nuclei iterati.

L'A. tratta poi il caso notevote in cui il nucleo è somma di prodotti di una funzione della sola x per una funzione della sola y, e in modo assai elegante ne deduce quali siano i nuclei uguali a tutti i loro iterati. E svolge completamente lo studio del nucleo risolvente nell'intorno dei suoi poli.

L'A. passa poi ai nuclei simmetrici; il capitolo dedicato ad essi fonde nel modo più elegante e completo la teoria generale con la teoria di questo caso particolare, per cui sono dati anche i teoremi relativi agli sviluppi in serie di autofunzioni (che l'A. chiama funzioni parametriche). Tali risultati vengono poi estesi ai nuclei $K(x, y)$ simmetrizzabili (tali cioè che esista un nucleo simmetrico definito $G(x, y)$, il quale soddisfi alla condizione che $\int G(x, z) K(z, y) dz$ o $\int K(x, z) G(z, y) dz$ siano simmetrici) e, in particolare ai nuclei polari (prodotto di una funzione della sola y per un nucleo simmetrico definito) e ad altri particolari tipi di nuclei simmetrizzabili.

Le relazioni tra un'equazione del FREDHOLM a nucleo non simmetrico e le equazioni a nucleo simmetrico sono svolte nel modo più brillante, giun-

Digitized by Google

gendo così alla teoria delle coppie di funzioni $\mu(x)$, $\nu(x)$ sodisfacenti per un nucleo $K(x, y)$ non simmetrico alle

$$\mu(x) = \lambda \int K x, y)\nu(y)dy \quad , \quad \nu(x) = \lambda \int K(y, x)\mu(y)dy$$

e ai relativi sviluppi in serie.

Questa parte del libro si chiude con brevi cenni sulla equazione di FREDHOLM di prima specie, e sui sistemi di equazioni del FREDHOLM.

Dunque, tranne i legami di questi studi col calcolo delle variazioni, e la teoria delle equazioni integrali con nucleo singolare, il lettore che abbia scorso questi capitoli conosce tutto quanto vi è di essenziale nelle nuove teorie, vede posti in chiarissima luce le relazioni che intercedono tra le varie parti di essa, ha un quadro completo ed esauriente che lo pone in grado di dominare perfettamente il nuovo algoritmo. Questa breve trattazione costituisce, per unità di metodo, per chiarezza di forma, per completezza di esposizione, un libro davvero prezioso.

Il Cap. III studia i rapporti tra le teorie precedenti e i problemi al contorno per le equazioni autoaggiunte del secondo ordine alle derivate ordinarie; nè si accontenta della parte generale e formale, ma sviluppa i calcoli (anche in minuti particolari) per i casi più noti delle serie di FOURIER, di funzioni sferiche e cilindriche ecc.; cosicchè il lettore trova subito molte importanti applicazioni e illustrazioni degli studi intrapresi.

Il problema di DIRICHLET, il problema di NEUMANN o problema derivato di DIRICHLET, il problema delle vibrazioni di una corda o di una membrana, alcuni problemi di propagazione del calore danno infine qualche applicazione delle equazioni integrali a problemi celebri dell'analisi e della fisica matematica.

Il libro si chiude con una preziosissima lista bibliografica. Possa questa opera trovare larga cerchia di studiosi; essa potrà efficacemente contribuire alla sicura e quasi completa conoscenza di teorie così importanti per l'analisi matematica! GUIDO FUBINI.

Opere complete ed Enciclopedie.

P. RUFFINI. *Opere matematiche, pubblicate sotto gli auspici del Circolo matematico di Palermo a cura di* E. BORTOLOTTI. T. I *con ritratto dell'Autore.* Palermo, Tip. matematica, 1915, 8°, f. XIII+421 (Prezzo L. 20).

Con vivissima soddisfazione annunciamo l'inizio di questa pubblicazione, con la quale l'Italia viene finalmente a rendere il debito omaggio ad uno dei suoi più eminenti pensatori. La diligenza spiegata nel prepararla dal prof. BORTOLOTTI (che a tutto quanto concerne il RUFFINI ed il suo tempo

Digitized by Google

dedica le più amorose cure) e la correttezza della stampa rendono tale pubblicazione degna dell'uomo insigne che intende onorare. Il presente volume contiene la celebre opera *Teoria generale delle equazioni algebriche*, seguita da chiarimenti e risposte ad obbiezioni, tratte da un fascicolo inedito del RUFFINI, e poi la grande memoria *Della soluzione delle equazioni algebriche determinate* ecc.; esso si chiude con una serie di *Annotazioni* destinate ad illustrare il testo dei succitati lavori ed agevolarne tanto l'intelligenza quanto il raffronto con altri scritti posteriori.

Possa il pubblico ricompensare con una cordiale accoglienza questa impresa intesa ad elevare la considerazione di cui gode all'estero la matematica italiana! G. L.

Storia.

EUCLIDE. *Il primo Libro degli Elementi*, testo greco, versione italiana, introduzione e note, a cura di GIOVANNI VACCA, con *Prefazione* di NICOLA FESTA, 8°, p. XVIII + 122. Firenze, G. Sansoni, 1916 (Prezzo L. 2).

Dopo che l'HEIBERG, applicando da sommo maestro tutti i procedimenti creati dai cultori della filologia greca, ebbe fissato (1888) il testo degli *Elementi di Euclide*, sorse in molti il desiderio di sostituire le versioni di quest'opera fatte da tempo in varie lingue moderne con altre che meglio rispecchiassero il pensiero del sommo Alessandrino. E già nel 1897, per iniziativa dello ZEUTHEN e per cura di THYRA EIBA, fu iniziata la stampa della versione danese che fu compiuta nel 1912. Intanto (1901) M. SIMON pubblicava una traduzione tedesca dei sei primi Libri, conforme al testo heiberghiano ed accompagnata da un'introduzione storica e da pregevoli note (questo *Bollettino*, T. IV dell'antica Serie, p. 62-3). Più tardi (1908) altrettanto faceva, con vedute assai più larghe, Th. L. HEATH pubblicando una traduzione inglese di tutti i tredici libri degli *Elementi* accompagnata da commenti storici e dottrinali così ampi da costituire una completa storia critica della geometria elementare (questo *Bollettino*, T, XI dell'antica Serie, p. 105-7). Analoghi intendimenti ha il volumetto del prof. VACCA che oggi annunziamo; a differenza però delle opere succitate, esso contiene anche il testo greco del I Libro degli *Elementi*, onde riuscirà di grande utilità agli studenti delle nostre scuole classiche. Di questa pubblicazione non sapremmo fare migliore elogio che augurando sia la prima di una serie che diffonda nuovamente nelle nostre scuole i libri geometrici degli *Elementi* (I-VI, XI-XIII) e poi eventualmente altri lavori, tramandatici dalla classica antichità. G. L.

Digitized by Google

Meccanica applicata.

G. COLONNETTI. *Principi di statica dei solidi elastici* — 8° gr. p. IX+282 con 4 Tav. Pisa, E. Spoerri, 1916 (Prezzo L. 16).

Il godimento che ho provato a leggere questo libro del Prof. Colonnetti « *Principi di statica dei solidi elastici* » mi spinge, non chiesto, a dirne brevemente in questo Bollettino.

Accanto ai trattati italiani del CESÀRO e del MARCOLONGO — elegantissimo il primo negli sviluppi e nelle proporzioni; denso e vario di contenuto il secondo — ben figura questo del COLONNETTI quale anello di congiunzione fra la teoria e le pratiche applicazioni. Le quali troppo spesso suole il matematico dimenticare, destando in molti ingegneri il preconcetto che una gran parte delle teorie scientifiche siano un puro lusso rispetto alla loro arte. Di qui nacque, non è molto, quella rivolta contro gli studî matematici che, non contenuta entro opportuni confini, ha dilagato con subito furore, producendo quel guazzabuglio di preparazione scientifica affrettata, acclamato nei primi bienni delle nostre Facoltà matematiche come una stupenda riforma. Ma in contrapposto, quale ammonimento per l'avvenire, sta l'opera d'una eletta schiera di giovani ingegneri e insegnanti dedicata a liberare la pratica dai metodi empirici e troppo spicci; consci, per profonda conoscenza di cose, che i progressi dell'ingegneria hanno le loro radici nella scienza. A quella schiera appartiene il COLONNETTI. Contro l'ordinario insegnamento della meccanica dei corpi elastici, spesso troppo sommaria e ristretta a casi particolari trattati con metodi speciali che sembrano propri al singolo caso, Egli insorge, avvertendo che (tali metodi) « *lasciano privo l'ingegnere d'ogni indicazione relativamente alla via che dovrebbe seguire qualora gli si presentasse da risolvere un nuovo problema, sia pure della stessa natura* ». Queste parole son da ripetersi a sazietà. Ed io aggiungo che nulla è più difficile ed importante dell'impostazione esatta d'un problema pratico, la quale è lavoro di critica, impossibile a farsi senza una precisa conoscenza dei principii generali e dei metodi della scienza pura. Ma basti di questo.

I. Fin dai primi paragrafi del libro in esame si manifesta la cura dell'A. di definire esattamente i giusti limiti d'applicazione della teoria matematica dell'elasticità; cura che apparisce poi costantemente in tutto lo svolgimento della materia, da cima a fondo. Egli pone in guardia gli audaci, che vogliono applicare o generalizzare ciò che non è applicabile o generalizza-

Digitized by Google

bile; persuade i diffidenti, che giudicano la teoria insufficiente anche dove è sufficientissima; incoraggia i timidi, che la credono un'ardua vetta accessibile a pochi. Il suo pensiero in proposito rispecchia quello di CLEBSCH e di CESÀRO: « *L'accusa fatta alla teoria matematica dell'elasticità di non trovarsi in accordo con l'esperienza va spesso rivolta alle varie pretese teorie escogitate per giustificare a posteriori e generalizzare oltre misura alcune formulette empiriche, mettendo insieme ipotesi contraddittorie, ingiustificate ed ingiustificabili. Le differenze che si trovano, si prende l'abitudine*—scrisse CLEBSCH—*di attribuirle ad imperfezioni della teoria piuttosto che ad irregolarità commesse nell'applicarla* » (CESÀRO).

Al paragrafo sesto comincia propriamente la trattazione matematica. La analisi delle deformazioni infinitesime (alle quali soltanto è dedicato tutto il libro), fatta dal punto di vista geometrico, è condotta alla maniera classica con tutta la chiarezza desiderabile. Per tenersi a contatto coi problemi della pratica l'A. introduce, insieme alle condizioni di SAINT-VENANT, le condizioni che provengono dall'esistenza di vincoli (punti fissi, punti costretti a scorrere sopra una superficie, ecc.) e ch'Egli chiama *equazioni di compatibilità.*

Segue dal § 13 al § 20 lo studio dell'energia potenziale elastica e delle sue applicazioni. Anche qui l'A., per le ragioni già dette, allarga il concetto di *stato naturale* d'un solido elastico, includendovi quegli stati di tensione prodotti esclusivamente dai vincoli e dalla connessione del corpo stesso. Perciò Egli introduce le sei componenti della deformazione iniziale, che somma con quelle della nuova deformazione prodotta, onde ottenere le caratteristiche della deformazione totale rispetto all'*ordinario stato naturale.* Di questa è funzione l'energia potenziale elastica unitaria, che poi riducesi a forma quadratica positiva.

Introdotte poscia le forze di massa e le forze superficiali, l'A. deduce dal principio dei lavori virtuali l'equazione fondamentale, che darà poi con opportune trasformazioni l'equazioni per l'equilibrio.

Ma prima di giungere a queste si sofferma alquanto su quella equazione per dimostrare con essa la stabilità della configurazione d'equilibrio e per esporre talune utili considerazioni sull'energia vincolata e sul lavoro di deformazione. Se ne serve inoltre per dedurre con rapido passaggio il teorema di CLAPEYRON relativo al rapporto fra il lavoro di deformazione e quello delle forze deformatrici; teorema che viene tosto opportunamente specializzato nel caso d'una *forza concentrata.*

Il terzo capitolo è dedicato alla ricerca esplicita dell'equazioni per l'equi-

Digitized by Google

librio e alla dimostrazione dell'unicità della soluzione. Seguono alcuni paragrafi sul principio della sovrapposizione degli stati d'equilibrio, sulla legge di HOOKE, sul suo grado d'approssimazione, sui caratteri e sull'utilità d'una teoria fondata su quei principii. Qui veramente è il punto dove il giovane ingegnere acquisterà e la persuasione del valor pratico della teoria e i lumi per ben applicarla.

Chiude la parte generale, che forma la *prima parte* del libro, un'accurata e limpida analisi delle tensioni interne e delle reazioni di vincolo.

II. L'argomento della *seconda parte* è il problema di SAINT-VENANT, che può ben chiamarsi il ponte di comunicazione fra la teoria e le sue pratiche applicazioni. Ivi l'A. comincia con l'introdurre le ipotesi della isotropia e dello stato naturale privo di tensioni, per mezzo delle quali riduce l'espressione del potenziale elastico a contenere le sole costanti di YOUNG e POISSON. A questo punto riassume le famose controversie circa il numero delle costanti elastiche, dalle quali, per opera di GREEN, W. THOMSON, VOIGT, uscì trionfante l'odierna teoria, detta, delle 21 costanti. Accenna ai risultati dell'esperienza e dà una tabella dei moduli d'elasticità normale e un'altra dei rapporti di contrazione laterale.

Indi entra a fondo nella trattazione del problema di SAINT-VENANT relativo alle deformazioni elastiche dei solidi cilindrici, o prismatici, a sezione qualsiasi.

Premesse le note ipotesi sulla legge di distribuzione delle forze applicate e delle tensioni interne, l'A. ricava l'equazioni fondamentali per l'equilibrio (relative agli spostamenti); ma invece che procedere alla loro generale integrazione, si contenta di assegnare *a priori* la forma analitica degli spostamenti, di verificare che soddisfano a tutte le condizioni volute, e di pervenire con esse al calcolo delle tensioni e delle azioni esterne; metodo che ben s'addice alla natura del libro. Spiega quindi e giustifica chiaramente l'ipotesi dell'equivalenza statica dei sistemi di forze applicate alla base, confortandola eziandio con citazioni sperimentali; e fa il calcolo della *sollecitazione relativa a una sezione,* introducendo i concetti di *sforzo normale, sforzo tagliante, momento flettente e momento torcente.* Dopo di che intraprende lo studio dettagliato delle deformazioni fondamentali: *estensione semplice, flessione semplice, estensione e flessione combinate, torsione semplice, flessione composta;* sviluppandolo in quella forma che meglio si presta alle pratiche applicazioni. Circa la prima e la seconda riassume i metodi sperimentali per la ricerca dei moduli di YOUNG e POISSON; e, rela-

Digitized by Google

tivamente alla terza, espone i metodi geometrici per la ricerca del *centro di sollecitazione, dell'asse neutro, dell'asse di sollecitazione;* dà la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'asse neutro tagli o no la sezione; e infine mostra come sperimentalmente si possano verificare quei risultati. Con uguale chiarezza e con gli stessi criteri Egli procede nello studio delle altre due deformazioni. Riguardo alla torsione tratta ampiamente il caso della sezione ellittica, illustrandolo con esempi numerici.

Della teoria accennata l'A. se ne serve per la trattazione di due problemi di grande importanza pratica: *il problema del taglio* e *il problema delle travi inflesse.* Trattazione in verità approssimata, come avverte l'A.; ma sufficientissima in molti casi e d'utilità immediata. E l'utilità Egli la dimostra con opportuni esempi pel primo problema; e, circa il secondo, con lo studio della linea elastica nel caso delle travi ad asse leggermente incurvato in un piano.

III. Dopo cotesta bella escursione ai confini della pratica, si ritorna nella *terza parte* alla teoria generale; ed anzi si giunge alla vetta della teoria, dove han posto gli utilissimi teoremi di MENABREA, di CASTIGLIANO, di BETTI. È questa la parte più originale del libro; nella quale non c'è soltanto lavoro d'elaborazione, ma eziandio lavoro d'invenzione. L'autore modestamente figura quarto fra sì illustri nomi col *secondo principio di reciprocità.* Qui dunque — come del resto in altri campi della teoria dell'elasticità — trionfa il genio latino. Mi sia lecito ricordarlo in questi momenti!

Fra gl'infiniti sistemi di tensioni interne soddisfacenti alle generali equazioni indefinite e ai limiti—sistemi che l'A. chiama *equilibrati*—ve n'è uno solo *possibile,* ossia corrispondente all'unico stato di deformazione in cui trovasi realmente il corpo. Discriminare questo da quelli è il fine del *teorema di* MENABREA, detto *il principio del minimo lavoro.* Trattandosi d'un problema di minimo, vi si giunge pensando il lavoro di deformazione funzione di quelle tensioni e applicando il calcolo delle variazioni. Il Colonnetti, posto in guardia il lettore contro le errate interpretazioni di quel teorema, lo enuncia rigorosamente così: « *Tra tutte le distribuzioni equilibrate di tensioni interne e di reazioni di vincoli, corrisponde allo stato d'equilibrio quella che rende minima la funzione* Φ_1; *il valor minimo di questa funzione è allora precisamente uguale al lavoro di deformazione* »; Φ_1 essendo la somma dei lavori di deformazione delle singole particelle del corpo considerate come indipendenti (e perciò non il lavoro totale di deformazione, che non esiste se non per l'unica deformazione equilibrata incognita).

Digitized by Google

L'uso di questo teorema dà luogo a un metodo di ricerca che non si deve confondere con quello che scaturisce dal principio dei lavori virtuali; e che anzi lo supera in utilità talvolta, specialmente nella scienza delle costruzioni; giacchè in realtà « *è precisamente lo stato di tensione interna — e non la deformazione in sè — che l'ingegnere è costretto a prendere in esame quando vuol farsi un'idea del grado di sicurezza con cui il materiale resistente può sopportare l'azione di un dato sistema di forze esterne* ». Dopo questo avvertimento l'A. insegna il modo di applicare il teorema e lo illustra con un esempio concreto. Indi passa al teorema di CASTIGLIANO.

Mentre il teorema di MENABREA prende in considerazione le tensioni, quello di CASTIGLIANO al contrario si riferisce alla componente dello spostamento in una data direzione; ma l'A. fa dipendere l'uno dall'altro; fuggendo così alle difficoltà d'una dimostrazione diretta. Il successo è dovuto all'introduzione d'un vincolo ausiliario — e perciò d'una forza concentrata, — che permette l'applicazione del teorema di MENABREA.

Ed eccoci al notissimo *principio di reciprocità del* BETTI. L'A. ne fa varie applicazioni; interessante particolarmente quella che mostra come possa farsi il trasporto a problemi nuovi e complessi dei risultati conseguiti in altri più semplici e meglio studiati. Egli tratta, per esempio, questo: *un cilindro incastrato per una delle basi è sollecitato da forze comunque ripartite lungo la superficie laterale e nella massa stessa; determinare gli spostamenti prodotti sull'altra base.*

A coteste applicazioni dirette l'A. aggiunge uno studio abbastanza esteso dei *sistemi piani*, in cui pure trovano utile impiego i suddetti principii. Deduce i teoremi di CULMANN, che tanta importanza hanno acquistato nella scienza delle costruzioni, e li illustra elegantemente mediante la risoluzione d'un problema fondamentale: *dato un solido* elastico soggetto a noti vincoli, e scelto su di esso *un elemento terminale*, calcolarne *il peso elastico* e determinarne *l'ellisse d'elasticità.*

Questa terza ed ultima parte del libro si chiude con l'esposizione del *secondo principio di reciprocità* dovuto all'A. stesso. Ecco in che consiste.

Dato un solido elastico S di forma semplicemente o multiplicemente connessa, in equilibrio sotto l'azione di forze esterne, s'immagini operato un taglio lungo una superficie σ tutta compresa in S e limitata alle pareti del corpo. Si potrà ristabilire il rotto equilibrio applicando agli elementi di σ, tanto per una faccia che per l'altra, forze identiche alle tensioni elastiche ivi suscitate dalle forze esterne nel primitivo stato d'equilibrio. E l'equazione che esprime il nuovo equilibrio si otterrà alla solita maniera

Digitized by Google

mediante l'applicazione del principio dei lavori virtuali. Orbene, per spostamenti virtuali il COLONNETTI sceglie quelli che corrispondono a una *distorsione*, che è una speciale deformazione risultante da un semplice moto rigido infinitesimo d'una faccia del taglio rispetto all'altra. Le distorsioni furono brillantemente studiate, sulla traccia delle idee di WENIGARTEN, da VOLTERRA e da SOMIGLIANA. Ciascuna di esse è definita dalle sei costanti che caratterizzano il moto rigido suddetto; chiamate perciò *le caratteristiche della distorsione*. In tal modo dunque, con facili sviluppi e considerazioni, l'A. giunge al teorema seguente: « *la somma dei prodotti delle sei caratteristiche del sistema di tensioni interne, che in un corpo elastico equilibrato si sviluppano in corrispondenza d'una data sezione, per le corrispondenti caratteristiche d'una distorsione, è uguale al lavoro di deformazione che le forze esterne eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe origine* ».

L'utilità di questo teorema è resa manifesta dalle applicazioni che l'A. ne fa ai sistemi piani; e più ancora al solido cilindrico, sollecitato anche lateralmente, nel caso in cui l'equilibrio si presenta staticamente indeterminato. Questo problema può essere ridotto allo studio di certe deformazioni che appartengono a un tipo ben noto e studiato.

Con questa bella e nuova applicazione termina il libro; il quale, per l'ottima scelta degli argomenti; per l'efficace loro trattazione, ond'è raggiunto senza apparente sforzo il fine di serrare vieppiù i legami fra la teoria e la pratica; per la chiarezza della dizione, che ne rende piana la lettura; per l'opportuno spirito critico che l'informa; e infine per certi ritocchi e aggiunte alle cose classiche, parmi, pur fra quegli stranieri, uno dei migliori del genere.

Nota — Senza volere toglier nulla al merito del COLONNETTI circa il secondo principio di reciprocità — valga a prova di ciò quanto ne ho detto di sopra — colgo l'occasione per fare osservare che tutti i teoremi di reciprocità, anche i più recenti, considerati talvolta come frutto di riposte indagini, altro non sono che applicazioni dirette, o speciali interpretazioni d'un teorema generale, che accennai in una mia Nota « *Sui potenziali newtoniani dell'elasticità e loro applicazioni; Rend. Acc. Lincei* 1914 ». Espresso in analisi vettoriale si enuncia così: *Se* β *e* β' *sono due omografie,* s *e* s' *due vettori, tutti funzioni dei punti* P *d'uno spazio* S *limitato da* σ; *e se è soddisfatta la condizione*

$$(1) \qquad I\left(\beta \frac{ds'}{dP}\right) = I_1\left(\beta' \frac{ds}{dP}\right),$$

Digitized by Google

che può dirsi condizione di reciprocità; sussiste la formula

$$(2) \qquad \int_S (\operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{s}' - \operatorname{grad}\beta' \times \boldsymbol{s})\, dS = \int_\sigma (\beta' \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} - \beta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s}')\, d\sigma,$$

$\boldsymbol{n}$ essendo il vettore unitario che definisce la normale interna in un punto generico di σ (1).

Invero, vogliasi dedurre il principio di BETTI. Basta attribuire a $\boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{s}'$ il signiticato di spostamento in due deformazioni del corpo S equilibrate da forze $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}'$ di massa, $\boldsymbol{F}_\sigma$, $\boldsymbol{F}_\sigma'$ superficiali; a β e β' quello delle corrispondenti omografie di tensione; indi tener conto dell'equazioni per l'equilibrio:

$$(3) \qquad \operatorname{grad}\beta = \boldsymbol{F} \quad , \quad \beta \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_\sigma$$

$$(3') \qquad \operatorname{grad}\beta' = \boldsymbol{F}' \quad , \quad \beta' \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_\sigma'.$$

La (1) risulta soddisfatta per le note proprietà del potenziale elastico (2); perciò la (2) dà

$$\int_S (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s} - \boldsymbol{F}' \times \boldsymbol{s}) dS = \int_\sigma (\boldsymbol{F}_\sigma' \times \boldsymbol{s} - \boldsymbol{F}_\sigma \times \boldsymbol{s}') d\sigma;$$

che esprime appunto il principio di BETTI.

Vogliasi ora il principio del COLONNETTI. Si mantenga il significato precedente a $\boldsymbol{s}$ e β, onde sussisteranno le (3); poi, operato un taglio Ω nel corpo S, nella maniera già detta—intendendo ch'esso riduca la connessione di S a semplice, se era multipla si attribuisca a $\boldsymbol{s}'$ il significato di spostamento in una distorsione definita dal moto rigido $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O)$ d'una faccia dal taglio rispetto all'altra; a β' quello dell'omografia di tensione corrispondente (in assenza di forze esterne); onde sarà

$$(4) \qquad (\operatorname{grad}\beta' = 0 \quad \beta' \boldsymbol{n} = 0 \text{ (su } \sigma) \quad \boldsymbol{s}_2' - \boldsymbol{s}_1' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{\omega} \wedge (P - O) \text{ (su } \Omega).$$

La (1) è sempre soddisfatta per la stessa ragione indicata già; perciò la (2), che ora si scrive nella forma

$$\int_S (\operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{s}' - \operatorname{grad}\beta' \times \boldsymbol{s}) dS = \int_\sigma (\beta' \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s} - \beta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{s}') d\sigma +$$

$$+ \int_\Omega [\beta' \boldsymbol{n}_1 \times (\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2) - \beta \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{s}_1' \boldsymbol{s}_2')] d\Omega,$$

---

(1) In sostanza è l'estensione d'un noto lemma di Green; credo anche la massima estensione; ma sta nella condizione (1) il secreto, per così dire, della sua applicazione.

(2) Il potenziale elastico è definito da $2H = \mathrm{l}_1 \left(\beta \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right)$.

Digitized by Google

diventa per le (3) e (4) (essendo s continuo attraverso Ω)

$$\int_S \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s}' dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \boldsymbol{s}' d\sigma = \boldsymbol{a} \times \int_\Omega \beta \boldsymbol{n}_1 d\Omega + \boldsymbol{\omega} \times \int_\Omega (P - O) \wedge \beta \boldsymbol{n}_1 d\Omega;$$

che è appunto la formula del COLONNETTI.

Parimenti, se si considerano due diverse distorsioni, è visibile come si giunga subito al teorema di reciprocità del VOLTERRA (1).

Al LORENTZ è dovuto un teorema di reciprocità nell'idrodinamica dei fluidi viscosi (2). Anche quello è una applicazione immediata della (2). Basta interpretare $s = v$, $s' = v'$ come le velocità dei punti in due moti diversi del fluido; β e β' come le corrispondenti omografie delle pressioni interne; indi tener presente l'equazioni del moto. Si verifica esser soddisfatta la (1), e si trova

$$\int_S (\boldsymbol{F} \times \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{F}' \times \boldsymbol{v}) ds + \int_S \left(\boldsymbol{v} \times \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} - \boldsymbol{v}' \times \frac{d\boldsymbol{M}}{dt}\right) ds = \int_\sigma (\boldsymbol{F}_\sigma' \times \boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}_\sigma \times \boldsymbol{v}') d\sigma.$$

Importanti applicazioni ne ha fatte l'Ing. PUPPINI, trattando i problemi delle falde artesiane e delle falde freatiche (3).

Infine, per non dilungarmi troppo, si ponga

$$s = Ta \quad , \quad s' = T'a \quad , \quad \beta = k \frac{dTa}{dP} \qquad \beta' = k \frac{dT'a}{dP} \quad (a \text{ unitario costante})$$

$$k \operatorname{grad} T = \boldsymbol{F} \qquad k \operatorname{grad} T' = \boldsymbol{F}',$$

interpretando T e T' come temperature, $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{F}'$ come i corrispondenti flussi di calore. Indi si osservi che

$$\operatorname{grad} \beta = \operatorname{grad} H(k \operatorname{grad} T, a) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} \qquad \text{ecc.};$$

e si giungerà a un teorema di reciprocità tra due diversi regimi di flusso termico entro un solido isotropo, del quale ne ha fatto utile uso il PUPPINI (4).

P. BURGATTI.

---

(1) « Sur l'equilibre des corps élastiques multiplement connex es. » Ann. Ec. Norm. Supérioure, XXIV, 1907.

(2) Vedi PALOMBY « *Sull'idrodinamica dei fluidi viscosi* » Giornale di Battaglini, 1912.

(3) *Sui fondamenti scientifici dell'idraulica*, Bologna, 1912.

(4) *Monitore tecnico 1916* — Vedi anche MARCOLONGO, Acc. Napoli 1913 « *Un'estensione della teoria del potenziale* » formola III.

Digitized by Google

Notizie

Un travestimento. Prima che scoppiasse la guerra attuale erano diffusissime nelle scuole italiane le tavole logaritmiche del Bruhns, edite dalla Casa Tauchnitz di Lipsia. Ora—evidentemente per non perdere una preziosa clientela—la stessa opera venne di recente presentata al pubblico col titolo *Nuovo manuale logaritmo-trigonometrico con sette decimali del dott. C. Bruhns, Professore di Astronomia e Direttore di Osservatorio. Per gli Istituti tecnici ed agrari, secondari e superiori del Canton Ticino e del Regno d'Italia* (Lugano, Casa editrice Libraria, 1916). Una rivista bibliografica come è la nostra non deve lasciare passare inosservato tal fatto, per la prima volta rivelato e commentato da N. Jadanza nella nota *Per una edizione di tavole di logaritmi* (Atto della R. Accademia delle Scienze di Torino, Seduta del 25 Febbraio 1917).

***

Tre articoli sopra H. Grassmann si leggono nel 1° Fascicolo del Vol. XXVII di *The Monist* (1917), tutti dovuti a A. E. Heath ed i cui soggetti sono sufficientemente caratterizzati dai loro titoli: *Hermann Grassmann* (1809-1877); *The neglect of the Work of Grassmann; The geometrical Analysis of Grassmann and its Connection with Leibniz's Characteristic.*

***

Bernardo Bolzano, membro della comunità italiana di Praga, cultore delle discipline teologiche e uno dei fondatori della matematica moderna, perseguitato dalle autorità ecclesiastiche per le sue idee giudicate troppo poco ortodosse per un prete cattolico, è il soggetto di un esteso studio dovuto a Dorothy Mand Wrinch e pubblicato nel succitato fascicolo di *The Monist.*

***

In memoria di d'Alembert. Compiendosi nel corrente anno due secoli dalla nascita del celebre enciclopedista, il prof. R. Fueter scelse come tema della propria *Antrittsrede* presso l'Università di Zurigo *Die Mathematik in der französischen Enciklopädie des 18. Jahrhunderts;* ma nel suo discorso, all'infuori di questo argomento, trattò della vita di d'Alembert nonchè delle origini e delle vicissitudini dell'opera enciclopedica a cui egli

Digitized by Google

ha così efficacemente contribuito, rievocando così un periodo di storia scientifica per interesse ed importanza a ben pochi secondo.

*
* *

Un'istituzione di nuovo genere. G. Sarton, il noto erudito belga, che trovò negli Stati Uniti sicuro asilo e cordiali accoglienze, lancia in *Science* del 23 Marzo 1917 l'idea di creare un grande istituto in servizio di coloro che intendono consacrarsi alla storia della scienza e della civiltà; il cospicuo numero di adesioni da parte di personalità eminenti che già ricevette la sua idea fa ritenere che essa possa ricevere l'attuazione, che noi di cuore le auguriamo.

*
* *

Un matematico crittografo. In un interessante articolo pubblicato nel fascicolo di Novembre 1917 del *Bulletin of the American Mathematical Society* e recante il titolo *John Wallis as a Cryptographer,* il prof. D. E. Smith ha rivelato un lato sinora ignoto dell'eminente matematico inglese; da lettere conservate a Londra nel British Museum ed ora pubblicate risulta, infatti, che il Wallis è l'inventore di una procedura intesa a scoprire il senso dei crittogrammi e che, servendosi di essa, egli potè rendere segnalati servigi al governo della sua patria. Il metodo che egli ha immaginato fu da lui comunicato (non a LEIBNIZ, malgrado le rinnovate istanze di questi), ma al proprio figlio e ad un nipote; ignoriamo se siasene serbata memoria sino ad oggi.

*
* *

Bibliografia dei Determinanti. Nel Vol. XLVII (1917) di *The Quarterly Journal of Mathematics.* TH. MUIR pubblica *A sixt List of Writings on Determinants,* comprendente lavori usciti nel periodo 1836-1915; i precedenti articoli sullo stesso tema del medesimo autore vennero inseriti nei Volumi XVIII, XXI, XXXVI, XXXVIII e XLII del citato periodico.

*
* *

Société mathématique de France. La presidenza di questo grande sodalizio scientifico ha deliberato di pubblicare nel proprio *Bulletin* anche lavori scritti in Italiano od in Inglese.

*
* *

D. Kirkuchi, il noto matematico ed uomo politico giapponese, nacque

Digitized by Google

a Tokyo il 17 Marzo 1855 ed ivi morì il 19 Agosto 1917. A quindici anni fu inviato dal governo del Mikado a Cambridge per compiervi i suoi studi scientifici. Rimpatriato sei anni dopo ebbe subito una cattedra di matematica nell'Università imperiale e la tenne per dodici anni. Fu poi successivamente decano del *College of Science*, rettore dell'Università di Tokio, direttore della *Peer's School*, rettore dell'Università di Kyoto e finalmente (1901) ministro dell'istruzione. Egli ha contribuito a far conoscere all'estero la matematica giapponese, mediante ottime pubblicazioni, ove le ricerche indigene sono lumeggiate con considerazioni tratte da pubblicazioni europee.

***

L'opera matematica di Roberval. Gli storici della matematica hanno sinora tracciato un quadro delle benemerenze scientifiche di questo egregio scienziato basandosi esclusivamente sopra la raccolta delle sue memorie pubblicate dall'Accademia delle Scienze di Parigi. Ma il fascicolo di Marzo 1845 del *Journal des Savants* contiene un articolo di V. COUSIN, intitolato *Reberval philosophe*, il quale fu lasciato totalmente in disparte, forse per il titolo non abbastanza espressivo che porta e forse per essere scritto da un letterato. Si ebbe torto di fare così; chè esso è frutto di un esame diretto dai manoscritti legati da Roberval a Lahire e da questi presentati alla Accademia delle Scienze di Parigi, la quale ne ebbe sempre la più sollecita cura. Nell'attesa che tali manoscritti siano esaminati da persona competente, notiamo, col COUSIN, che ivi si trovano informazioni precise intorno a ROBERVAL come insegnante al Collegio di Francia; da esse risulta, infatti, che egli aveva composto degli *Elementi di Matematica*, di cui il COUSIN pubblicò la prefazione interessantissima, e che aveva meditato a lungo sopra il modo di procedere nella ricerca scientifica, riguardo a cui aveva formulata una serie di ottime regole, che si trovano riprodotte nell'articolo citato. Emerge da ciò che su ROBERVAL come matematico l'ultima parola non venne ancora pronunciata.

***

Il concetto di massa nell'insegnamento. Nel fascicolo di Gennaio 1918 di *Tho American matkematical Monthly* si legge una *Bibliographical Note on the Use of the Word Mass in current Textbooks di* E. V. HUNTINGTON, frutto dell'esame di un considerevole numero di trattati di meccanica, in gran parte inglesi ed americani, in piccola tedeschi e francesi, nessuno italiano.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
Serie II. Vol. I. Fasc. II — Aprile-Giugno Anno XX. 1918

Giulio Vivanti

ADOLFO VITERBI (1873-1917).

La scienza matematica italiana è stata duramente provata dalla guerra; dopo l'Orlando e il Torelli, e a poca distanza dal Levi, anche Adolfo Viterbi è caduto sul campo dell'onore.

Adolfo Viterbi nacque a Mantova il 27 settembre 1873. Percorsi gli studi di matematica nell'Università di Bologna, si laureò a Messina nel 1898; intraprese poi il corso di ingegneria a Padova, dove ebbe nel 1901 il diploma di Ingegnere civile. Pure a Padova ottenne poco dopo la libera docenza in Meccanica razionale. Nel 1905 fu incaricato dell'insegnamento della Geodesia teoretica a Pavia; divenne straordinario in seguito a concorso nel 1910, e fu promosso ordinario nel 1914. A Pavia tenne pure, in varie epoche, gli incarichi di Matematica pei chimici, Fisica matematica e Statica grafica. Nel 1917 fu nominato Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere; era già da molti anni Socio della R. Accademia Virgiliana di Mantova. Maestro accurato e coscienzioso, seppe contemperare nel suo insegnamento in giusta misura la teoria e la pratica; e quando, per nuove disposizioni regolamentari, la Geodesia teoretica rimase

Digitized by Google

riservata ai soli studenti di Matematica pura e di Fisica, mutò opportunamente l'indirizzo delle sue lezioni, facendone un vero corso di alta Matematica.

Come altri esimi cultori delle matematiche applicate, anche Adolfo Viterbi incominciò la sua carriera scientifica con ricerche di Analisi pura; studiò l'operazione funzionale inversa di quella costituita dalla risoluzione di un'equazione integrale; trattò interessanti questioni connesse colle classiche ricerche di Mittag-Leffler sulla continuazione analitica e di Poincaré sulle funzioni fuchsiane. Ma gli studi d'ingegneria lo condussero quasi spontaneamente ad occuparsi di argomenti di Meccanica e di Fisica matematica; ed anche in questi campi, e specialmente in quello dell'Idrodinamica, portò notevoli contributi.

Acquistata così una larga competenza tanto nel dominio delle Matematiche pure che in quello delle loro applicazioni, il Viterbi era ormai maturo per passare alla scienza speciale alla quale aveva risoluto di dedicarsi, la Geodesia teoretica.

Nè il suo passaggio a questa scienza segnò il distacco dalle altre parti delle Matematiche; giacchè, nello stesso tempo in cui consacrava ad essa importanti lavori, pubblicava pure altre memorie sull'anello di Saturno, sul problema di Dirichlet, sulle equazioni integrali, sulle superficie rigate, mentre nelle stesse ricerche di Geodesia non trascurava i punti di contatto con questioni analitiche e geometriche. Della sua perizia nell'uso degli strumenti geodetici sono prova la determinazione della latitudine della torre dell'Università di Pavia, una serie di osservazioni di palloni fatte in collaborazione col prof. Pericle Gamba, ed uno studio, rimasto purtroppo incompiuto, sull'orizzonte marino.

Tale il maestro e lo scienziato. Il filantropo, il patriota si rivelarono a chi non lo conosceva solo dopo la gloriosa sua morte; giacchè le sue virtù si nascondevano sotto una rude scorza di troppo modesta ritrosia. Ma i suoi amici sanno che, fino dalla prima gioventù, predicò colla parola, e praticò colle opere, il vero socialismo; che del largo censo fu avaro verso sè stesso e generoso verso gli altri; che, molto prima dello scoppio della guerra, fece studi, viaggi ed esperimenti costosi per creare un allevamento atto a fornire all'esercito il cavallo da tiro per l'artiglieria; che, interventista convinto, entrò volontario nell'esercito al principio della guerra come sottotenente del genio, senza che lo trattenesse, di fronte a ciò che reputava suo dovere, l'idea di trovarsi a pari grado con molti di quelli che nelle aule universitarie erano suoi allievi. Ebbe agio di mettere a profitto

Digitized by Google

la sua profonda competenza quale ingegnere e quale geodeta nell'esecuzione delle opere militari di cui gli fu affidata la direzione. Promosso tenente, prese parte alla controffensiva del 1916 nel Trentino, e fu ferito da una palla di fucile, che gli fratturò il radio destro; per il coraggio dimostrato gli fu assegnata la medaglia di bronzo al valor militare. Sebbene non completamente guarito, volle riprender servizio; assegnato all'Istituto geografico militare di Firenze, chiese di essere inviato in zona di guerra, e fu applicato alla Sezione cartografica della III armata. Nell'offensiva dell'agosto 1917 volle assumere il compito di ufficiale segnalatore; per i servigi resi in tale qualità ebbe la promozione a capitano per merito di guerra. Nel settembre 1917, in base a concorso, fu ammesso ad un corso di Stato Maggiore apertosi a Verona; interrotto questo dai dolorosi avvenimenti dell'ottobre, fu addetto allo Stato Maggiore del Comando della 28ª Divisione. Il 18 novembre, spintosi arditamente in zona battuta al di là delle nostre difese per meglio osservare le linee nemiche, cadeva gloriosamente sul campo. Fu sepolto cogli onori militari nel cimitero di Monastier sul Piave, e la sua memoria fu fregiata della medaglia d'argento al valor militare. Il Duca d'Aosta, comandante della III Armata, ne annunziava la morte al Rettore dell'Università di Pavia con queste parole:

« Compio il doloroso ufficio di partecipare a V. S. e al corpo accade-
« mico che ieri, colpito da piombo nemico sulle linee più avanzate, glo-
« riosamente lasciava la nobile vita sul campo il capitano prof. Adolfo
« Viterbi. La perdita di così grande, fulgida figura di soldato e di scien-
« ziato, che tutto offrì e tutto dette alla patria, è lutto per l'esercito e per
« la scienza. Invio vivi sensi di cordoglio. »

La non mai smentita liberalità di Adolfo Viterbi si era fatta ancor più larga durante la guerra, e tutte le istituzioni sorte nella sua città natale per lenire il terribile flagello avevano da lui l'aiuto più generoso. Nè la morte ha posto un termine alle sue benemerenze; giacchè il suo testamento, modello di illuminata filantropia, dispone di circa mezzo milione a favore degli istituti di beneficenza e di assistenza della città e provincia di Mantova.

Possa la tomba di Adolfo Viterbi divenire la mèta del pellegrinaggio di tutti coloro che ammirano la modesta virtù, la solida scienza, il patriottismo sincero!

Digitized by Google

Elenco delle pubblicazioni di Adolfo Viterbi.

1897.

1. *Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, riguardata come elemento d'un calcolo.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. 6, 1° sem., p. 247-254.

2. *Un'estensione di alcuni concetti del calcolo infinitesimale.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. 6, 1° sem., p. 267-275.

1898.

3. *Le equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici integrabili algebricamente studiate in base alla teoria delle « funzioni fuchsiane » del Poincaré.* Giorn. di Mat., T. 35, p. 150-173 (1897); T. 36, p. 55-67.

4. *Sulla continuazione analitica delle funzioni monogene uniformi rappresentate col metodo del Mittaz-Leffler.* Rend. Circ. mat. Palermo, T. 12, p. 95-110.

5. *Sui gruppi di sostituzioni a coefficienti interi appartenenti a un corpo di numeri complessi di grado finito.* Giorn. di mat., T. 36, p. 346-361.

1899.

6. *Sull'operazione funzionale rappresentata da un integrale definito, riguardata come elemento d'un calcolo.* Annali di mat., S. II, T. 26, p. 261-342 (1898); S. III, T. 3, p. 299-343.

1900.

7. *Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. 9, 1° sem., p. 68-70, 97-102.

1901.

8. *Sui casi d'equilibrio di un corpo elastico isotropo, che ammettono sistemi isostatici di superficie.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. 10, 1° sem., p. 408-412.

1902.

9. *Necrologio. Camillo Tito Cazzaniga.* Boll. bibl. st. sc. mat., T. 5, p. 87-90.

10. *Sopra una classe di moti vorticosi permanenti.* Atti Ist. Ven., T. 61, p. 449-464.

1903.

11. *Aggiunta alla nota sopra una classe di moti vorticosi permanenti.* Atti Ist. Ven., T. 62, p. 175-176

12. *Sui moti stazionari spontanei d'un solido immerso in un liquido indefinito.* Atti Ist. Ven., T. 62, p. 1283-1328.

13. *Sull'equilibrio di un ellissoide planetario di rivoluzione elastico isotropo.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. 12, 1° sem., p. 249-257, 300-303.

1904.

14. *Formole ellittiche per i moti spontanei stazionari d'un solido immerso in un liquido indefinito.* Atti Ist. Ven., T. 63, p. 873-913.

1906.

15. *Sull'espressione generale della gravità all'esterno di un pianeta del quale una superficie esteriore d'equilibrio sia un ellissoide.* Rend. Acc. Lincei, S. V, T. 15, 2° sem., p. 276-284, 369-375.

1907.

16. *Determinazione* (1906) *della latitudine della torre della R. Università di Pavia.* Pubblicazioni del R. Osservatorio di Brera. Milano.

Digitized by Google

17. *Sullo sviluppo di alcune speciali funzioni di una variabile in serie di funzioni sferiche.* Rend. Circ. mat. Palermo, T. 23, p. 156-162.

18. *Sulla determinazione del potenziale esterno della gravità e dell'equazione del geoide mediante le deviazioni della verticale.* Atti Ist. Ven., V. 66, p. 425-451.

1908.

19. *Sulla determinazione degli elementi intrinseci, fondamentali, della superficie terrestre mediante misure locali.* Rend. Circ. mat. Palermo, T. 25, p. 209-227.

20. *Sulle vibrazioni forzate di una sfera isotropa, ruotante intorno al suo centro.* Nuovo Cimento, S. V, T. 16, p. 189-215.

21. *Della curva di allineamento sopra la superficie terrestre.* Periodico di mat., S. III, T. 6, p. 17-30.

1909.

22. *Alcune formole relative alle traiettorie ortogonali di una famiglia di superficie ed applicazioni di esse allo studio della superficie di livello terrestre.* Atti Ist. Ven., T. 68, p. 161-181.

23. *Sui valori della funzione potenziale dell'attrazione di una linea materiale in punti prossimi alla linea stessa.* Rend. Ist. Lomb., S. II, T. 42, p. 913-928.

24. *Sulle proprietà cardinali dei sistemi diottrici imperfettamente centrati.* Atti Acc. Virgiliana, Nuova Serie, T. 2, p. 35-79.

1910.

25. *Sullo strumento dei transiti della R. Università di Pavia, ricavato dalla trasformazione di un antico cannocchiale a passaggi.* Rivista di astron. e sc. affini, T. 4.

26. *Su un tipo speciale di teodolite particolarmente atto all'inseguimento di palloni.* Rivista di fis., mat. e sc. nat., T. 22, p. 147-158.

27. *Su una classe speciale di forme dell'anello di Saturno.* Atti Ist. Ven., T. 69, p. 1129-1149.

1911.

28. *Sulle direttrici piane dell'anello di Saturno.* Atti Ist. Ven., T. 70, p. 1311-1333.

1912.

29. *Su la risoluzione approssimata delle equazioni integrali di Volterra e su la applicazione di queste a la rappresentazione analitica delle curve.* Rend. Ist. Lomb., S. II, T. 45, p. 1027-1060.

1913.

30. *Sul trasporto delle coordinate geografiche e degli azimut lungo archi di geodetiche.* Rend. Ist. Lomb., S. II, T. 46, p. 884-904.

1914.

31. *Alcune considerazioni su le superficie rigate.* Rend. Ist. Lomb., S. II, T. 47, p. 195-204.

32. *Su la risoluzione approssimata del problema di Dirichlet.* Rend. Ist. Lomb., S. II, T. 47, p. 763-796.

33. (in collaborazione col prof. P. Gamba) *Osservazioni simultanee di palloni fatte da due stazioni con teodoliti.* Ann. R. Uff. Centr. di Meteor. e Geodin., T. 36.

Inoltre: Vari corsi litografati di Geodesia teoretica ed alcune recensioni in questo *Bollettino.*

Digitized by Google

Guido Fubini e *Gino Loria*

EUGENIO ELIA LEVI (1883-1917).

Fra le perdite subite dalla Scienza e dalla Patria in conseguenza dell'immane flagello che da un quadriennio insanguina il mondo, nessuna riuscì più dolorosa all'Italia di quella rappresentata dalla scomparsa dell'Uomo egregio alla cui memoria sono consacrate le presenti linee, giacchè in esso la Matematica riponeva le più fondate speranze, per un lavoro di lunghi anni fecondo di considerevoli progressi.

*
* *

Eugenio Elia Levi nacque a Torino il 18 Ottobre 1883. Esauriti nella città natale gli studi secondari, ottenne per concorso un posto nella Scuola Normale superiore di Pisa e lo conservò per l'intero quadriennio 1900-1904, durante il quale egli frequentò brillantemente il corso di Matematiche pure presso quella Università. Conseguita con pieni voti e lode la Laurea dottorale il 20 Dicembre 1904, gli fu concesso di rimanere ancora a Pisa, avendo ottenuto per un biennio il posto di fondazione Lavagna ed in quel periodo di tempo iniziò la propria carriera didattica impartendo agli alunni della Scuola Normale corsi complementari sopra il Calcolo numerico, la Teoria dei vettori e le Equazioni differenziali. Nella stessa Scuola ottenne il 3 Luglio 1907, pure a pieni voti e con lode, il Diploma di abilitazione all'insegnamento delle matematiche. Nel frattempo, e precisamente a partire dall'anno 1906-1907, era stato chiamato dal prof. Ulisse Dini all'ufficio di Assistente alla cattedra di Calcolo infinitesimale. Tale carica conservò sino al 19 Febbraio 1909, quando cioè, essendo stato dichiarato secondo fra gli eleggibili nel concorso per professore straordi-

Digitized by Google

nario di Analisi infinitesimale presso l'Università di Messina (1), venne chiamato dalla Facoltà di Scienze dell'Università di Genova a professare ivi tale disciplina. Ebbe subito ivi anche l'incarico dell'insegnamento dell'Analisi superiore (2) e fu promosso ordinario nel 1912 (3). Riservandoci di analizzare fra breve la sua cospicua produzione scientifica, notiamo subito che un'attestazione solenne dell'importanza dei lavori da lui pubblicati nel quinquennio 1907-11 viene offerta dal conferimento a lui della Medaglia d'oro da parte della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), in seguito ad una Relazione lusinghiera di E. d'Ovidio, L. Bianchi e V. Volterra (relatore), nella quale è dichiarato che più d'una delle memorie esaminate sarebbe stata sufficiente a renderlo meritevole della distinzione che veniva a lui proposta (4).

Interventista della prima ora, il Levi, non appena l'Italia decise di partecipare al grande conflitto europeo, chiese la revisione della riforma a lui decretata quando, per l'ammissione all'esercito, vigevano norme differenti dalle attuali. Ottenutala, fu nominato Sottotenente del Genio M. T. ed assegnato al I Reggimento Genio. A Pavia prestò giuramento di fedeltà il 24 ottobre 1915 ed ivi rimase sino al termine di quest'anno in periodo d'istruzione. Fu poi restituito alla cattedra; ma, dietro sua domanda, in capo a tre mesi, venne richiamato in servizio (29 Marzo 1916) e poco dopo inviato in zona di guerra (26 Aprile 1916). L'ottima prova da lui fatta gli valse la promozione a Tenente (31 Agosto 1916) e poi la nomina a Capitano

---

(1) La Relazione della Commissione (Arzelà, Volterra, Pascal, Vivanti e Lauricella rel.) si può leggere nel *Bollettino ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione*, II Sem. 1908, p. 4998-5006.

(2) Ecco gli argomenti da lui svolti (eccetto l'ultimo, che fu semplicemente annunziato) come titolare di tale insegnamento:

1909-10: *Equazioni differenziali ed integrali.*

1910-11: *Fondamenti della Teoria delle funzioni di una variabile reale. Calcolo delle Variazioni.*

1911-12: *Teoria elementare delle funzioni di una o più variabili complesse. Problema di uniformizzazione delle funzioni poliedriche.*

1912-13: *Eqnazioni differenziali.*

1913-14: *Equazioni differenziali ed integrali.*

1914-15: *Calcolo delle Variazioni.*

1915-16: *Capitoli scelti della teoria delle Equazioni a derivate parziali.*

1916-17: *Funzioni di una o più variabili complesse.*

(3) La Relazione della Commissione (d'Arcais, Pincherle, Torelli, Bagnera e Fubini rel.) si può leggere nel *Boll. del Min. della P. I.* I Sem. 1913, p. 278-9.

(4) Vedi *Mem. di Matematica e Fisica della Soc: Ital. delle Scienze*, Ser. III, T. XVII, 1912.

Digitized by Google

per merito di guerra (Decreto del Comando supremo del 13 Maggio 1917 confermato dal Ministero della Guerra il 31 dello stesso mese). I dolorosi fatti accaduti sul finire dello scorso Ottobre sul nostro confine Orientale ebbero per conseguenza il richiamo del LEVI dall'altipiano di Bainsizza, ove egli si trovava, verso le pianure friulane; ed appunto mentre egli riconduceva la propria compagnia, giunto nella località Subida nei pressi di Cormons, una troppo intelligente fucilata nemica lo freddò; tutti coloro che si trovavano con lui rimasero incolumi e, prima di riprendere il cammino interrotto, diedero onorata sepoltura ai resti mortali di colui che veneravano come superiore insuperabile ed a cui tributavano un affetto figliale. Onore a Lui!

*
* *

Possiamo dividere le ricerche del Levi in quattro gruppi:

α) studii sulle equazioni differenziali,

β) ricerche sul calcolo delle variazioni,

γ) lavori sulla teoria delle funzioni analitiche (di più variabili),

δ) memorie e note di argomento vario.

A questi lavori si aggiungano i corsi universitarii di analisi superiore (di cui uno solo litografato), a cui l'A. dedicava molto tempo e molte cure; e se, come speriamo, saranno pubblicati, si vedrà come essi diano sempre in forma originale e profonda il quadro completo della teoria, che essi dovevano illustrare, mostrando in chiara luce quali sono i problemi e i principii fondamentali, e in conseguenza lumeggiando le varie parti, di cui la teoria studiata si compone. Tali corsi dimostrano le doti peculiari dell'A: vedere i problemi dal punto di vista più generale, non arretrare davanti alle difficoltà, non lasciare un argomento prima di averlo completamente esaurito.

Per le equazioni lineari totalmente ellittiche il Levi (10) (1), servendosi dell'ausilio delle equazioni integrali, con metodo geniale che la scarsità di spazio ci vieta di riassumere, deduce in casi molto generali (perfino anche per qualche sistema di equazioni) l'esistenza di *una soluzione fondamentale* dai risultati particolari del Somigliana, del Fredholm, ecc. per talune equazioni o sistemi di equazioni a coefficienti costanti.

In un'altra mem. (20) il Levi risolve i problemi al contorno per mezzo del semplice e luminoso procedimento, che a Lui deve la Scienza, della

(1) Questi Num. sono quelli, con cui, nel successivo elenco delle pubblicazioni del Levi, sono citati i lavori qui rapidamente riassunti.

Digitized by Google

funzione compensatrice; così il problema è, per usare le parole stesse dell'A., spezzato in due gradi: nel primo, e cioè nella costruzione di tale funzione si soddisfa alle condizioni al contorno, e solo approssimativamente all'equazione proposta; nel secondo, e cioè nello studio di una equazione del Fredholm, si opera in modo da soddisfare esattamente all'equazione; e si dimostra così che i teoremi di esistenza e di unicità valgono generalmente, e vengono sempre a mancare insieme. Nell'appendice si vincono alcune difficoltà particolari relative all'esistenza di funzioni soddisfacenti ad alcune limitazioni preliminari, ed altro. Questa mem., per le difficoltà superate, per gli acuti procedimenti analitici, per il metodo sapiente, per la profondità dell'analisi, costituisce certamente una delle più belle e importanti ricerche sulle equazioni differenziali, che siano state pubblicate negli ultimi anni.

In una Nota (8) dedicata al problema di Cauchy per le equazioni lineari alle derivate parziali in due variabili indipendenti, l'A. dimostra che nel campo delle funzioni di variabile reale il problema di Cauchy non si può sempre porre, se l'equazione data ha caratteristiche multiple o complesse. In altre note (12 e 13) l'A. studia il problema di Cauchy nei casi, in cui tale problema si può porre, e lo risolve nel caso generale, precisando al solito e sormontando col metodo più poderoso le difficoltà della questione.

Infine in un ulteriore lavoro (21) si affrontano anche i casi di equazioni non lineari, e di caratteristiche multiple (doppie e triple), che egli classifica con grande acume, mostrando in quali casi è possibile porre il problema di Cauchy. Questi studi aprono una nuova via per la classificazione delle equazioni alle derivate parziali.

L'equazione del calore è (14, 15, 18) portata dall'A. alla stessa perfezione, cui era giunta negli ultimi anni la teoria delle equazioni ellittiche; tali lavori hanno ricevuto così vasta rinomanza in Italia e all'estero, da potersi riguardare ormai classici.

In due Mem. (25, 26) l'A. approfondisce, superando le più gravi difficoltà, con metodi nuovi e fecondi, il problema fondamentale di trovare la soluzione di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti, che passi per due curve assegnate uscenti da uno stesso punto O, quando il birapporto formato dalle loro direzioni e dalle corrispondenti direzioni caratteristiche uscenti da O soddisfa a una certa disuguaglianza; problema che con grande acutezza egli pone e risolve anche quando l'equazione ha caratteristiche doppie di uno dei tipi studiati dall'A. in (21). Per l'altro tipo di equazioni a caratteristiche doppie (p. es. per

Digitized by Google

l'equazione del calore) l'A. esaurisce la questione nel campo delle variabili reali, enunciando qualche risultato parziale ed un probabile teorema generale (non dimostrato) nel campo delle funzioni di variabile complessa.

In (23) si prova che una funzione limitata e integrabile per cui valga il teorema della media di Gauss è necessariamente armonica.

Di importanza fondamentale è pure il secondo gruppo di lavori sul calcolo delle variazioni. Nella Mem. (31), preceduta a breve distanza dalle Note (28), (29) si osserva come la ben nota obbiezione e relativa condizione di Weierstrass, con cui questi completava i classici risultati di Eulero, Legendre, Iacobi, provano che lo spezzamento della variazione totale nelle variazioni dei vari ordini non è il più adeguato per scinderla in parti *di diverso comportamento infinitesimale*. Uno spezzamento in parti, che, con acutissimo metodo, l'A. prova a soddisfare a questa condizione, è ottenuto dal Levi per gli integrali del tipo $\int_a^b f(x, y, y')dx$, e [in casi molto generali, ma che il Levi non considera ancora come i più generali possibili] anche per integrali di tipo analogo, in cui la funzione integranda dipenda però da derivate della y di ordine superiore al primo.

Questa Mem. apre nuove vie al calcolo delle variazioni, che saranno probabilmente feconde di nuovi risultati. Basti qui citare l'applicazione al problema isoperimetrico, che il Burnengo, sotto la guida dell'A., ottenne nella sua tesi di laurea (Atti della R. Università di Genova, vol. 21, 1895). Accanto a queste ricerche poderose e fondamentali ricorderemo la Nota 32 dedicata a un teor. del Lindeberg, e la Nota 34 che prova la necessità della condizione di Weierstrass per l'estremo di un integrale doppio.

Al terzo gruppo di lavori appartiene la Nota (4), in cui si studiano esaurientemente le condizioni di convergenza delle serie di Poincaré per le funzioni automorfe; nella Mem. (6) si studiano alcuni casi particolari di funzioni zeta-cremoniane, che subiscono cioè trasformazioni *razionali* assegnate, quando le variabili subiscono un certo gruppo di trasformazioni *lineari*. Fondamentale è la Nota (30), in cui si dimostra che una serie di polinomi omogenei di più variabili x, ordinata per gradi crescenti dei termini, convergente in una regione piccola a piacere, rappresenta in un intorno dell'origine una funzione analitica regolare; e si studia la questione in quali punti del campo di convergenza tale funzione sia regolare.

Di massima importanza sono i geniali lavori, (22, 24) in cui, approfondendo i risultati di Hartogs, si trova che le varietà formate dai punti singolari essenziali di una funzione analitica di due variabili indipendenti sod-

Digitized by Google

disfa a condizioni molto restrittive. E si deduce, risultato mirabile e inaspettato, che, se $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) \gtrless 0$ è una regione dello spazio, in cui una funzione analitica delle $x_1 + ix_2, y_1 + iy_2$ è meromorfa, allora φ soddisfa a una disuguaglianza $E\varphi \lessgtr 0$, dove con $E\varphi$ si indica un certo polinomio, formato con le derivate prime e seconde di φ. Si trovano interessanti proprietà delle ipersuperficie $\varphi = 0$ soddisfacenti alla $E\varphi = 0$. E viceversa si prova che, se $E\varphi \lessgtr 0$, allora nella regione $\varphi \gtrless 0$ si può costruire una funzione meromorfa, che abbia per frontiera la varietà $\varphi = 0$, oppure una sua regione *convenientemente limitata*. La proprietà dimostrata necessaria si prova quindi, anche sufficiente almeno per campi abbastanza piccoli.

Passando all'ultimo gruppo di lavori, ricorderemo la Nota (1), in cui si prova un teorema enunciato, ma non dimostrato dal Killing sulla struttura dei gruppi di S. Lie; ricorderemo la Nota (3) in cui, insieme ad altri notevoli risultati, si prova che un gruppo primitivo di S. Lie non può contenere operazioni di ordine ≥ 4; ricorderemo la nota (2) dedicata ai sottogruppi continui del gruppo di movimenti in uno spazio euclideo ad n dimensioni. Quest'ultima nota si riattacca intimamente alla tesi di laurea (16), in cui l'A. trova gli invarianti di una superficie (a due dimensioni) immersa in un iperspazio euclideo rispetto al gruppo di movimenti e pone così in tutta generalità le basi per la geometria differenziale di tali superficie; a cui porta interessanti contributi studiando le curve tracciate su esse, la curvatura delle sezioni normali, e alcune classi notevoli di tali superficie, che hanno relazioni con alcuni recenti lavori geometrici italiani.

Con metodo di estrema semplicità l'A. studia (19) quando, date due superficie di ugual elemento lineare, si può flettere con continuità senza rottura nè duplicatura una di esse fino a farla distendere sull'altra: ciò che si prova possibile in tutti i casi, purchè, nel caso di superficie a curvatura positiva, si sostituisca, se necessario, ad una delle superficie date la superficie simmetrica.

Nella Nota (27) l'A. estende un teorema che il Levi-Civita aveva dimostrato per l'anomalia del nodo lunare, provando in generale il teorema inaspettato che. se $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ è un'equazione tale che f, oltre a soddisfare alle condizioni di Lipschitz, ammette due periodi, uno come funzione della x, l'altro come funzione della y, allora ogni soluzione si può scrivere nella forma $y = \omega x + \varepsilon(x)$, dove ω è una costante, ε è una funzione che resta limitata anche quando x diventa grande a piacere.

Nella Nota 11 si corregge nel modo più semplice un errore rilevato dal

Digitized by Google

Levi-Civita in una delle classiche memorie di Hilbert sulle equazioni integrali: tale correzione mostra come l'A. sappia subito afferrare l'intima essenza dei problemi da lui studiati. Nella Nota (7), esposto in modo nuovo ed estremamente semplice un metodo dello Schmidt per le equazioni integrali, si riesce ad allargare il campo, in cui valgono i classici risultati del Fredholm.

Nella nota 5 si prova il lemma fondamentale della celebre Mem.: *Sur les équations de la physique mathématique* di Poincaré per una estesa classe di campi non convessi. Col metodo più ingegnoso resta quindi per tali campi rimossa l'obbiezione che il Lauricella aveva formulato alle deduzioni del Poincaré.

Come si riconosce da questo sguardo rapido e incompleto, i lavori del Levi trattano quasi sempre problemi di importanza fondamentale: le difficoltà incontrate da altri, anche sommi, non lo scoraggiano; e, con analisi sempre profonda, spesso assai semplice e ingegnosa, vengono precisate e vinte. I problemi non sono affrontati da un solo lato, ma sono visti nel modo più completo nelle relazioni che li legano alle questioni principali della scienza, cosicchè in una ricerca del Levi i problemi sono sempre studiati e risoluti nel modo più esauriente. In molti campi dell'analisi Egli ha aperto nuove vie, indicato nuovi metodi, gettato lo sguardo su nuovi orizzonti. La sua opera sarà un monumento che attesterà la potenza del suo ingegno, e che a noi, suoi colleghi ed amici, farà sempre rimpiangere chi tanto ha onorato l'università e la scienza italiana!

Elenco delle pubblicazioni di E. E. Levi.

1905.

1. *Sulla struttura dei gruppi finiti e continui.* Atti della R. Acc. di Torino, T. XL.
2. *Sui gruppi di movimen i.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, I Sem. 1905.
3. *Sui gruppi transitivi dello spazio ad n dimensioni.* Id. II Sem. 1905.

1906.

4. *Ricerche sulla teoria delle funzioni automorfe.* Id. II Sem. 1906.
5. *Su un lemma di Poincaré.* Ivi.

1907.

6. *Sopra una classe di trascendenti meromorfe.* Ann. di Matem., III Ser. T. XIV.
7. *Sulle equazioni integrali.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, II Sem. 1907.
8. *Sul problema di Cauchy.* Ivi.
9. *Sull'equazione del calore.* Ivi.
10. *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, I Sem. 1907 e Rend. del Circolo matem. di Palermo.

1908.

11. *Sur l'application des équations intégrales au problème de Riemann.* Göttinger Nachrichten.
12. *Sul problema di Cauchy per le equazioni lineari in due variabili a caratteristiche reali.* Rend. del R. Ist. Lombardo, Ser. II, T. XLI (due note).

Digitized by Google

13. *Sul problema di Cauchy per le equazioni a caratteristiche reali e distinte.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, I Sem. 1908.

14. *Sull'equazione del calore.* Ann. di Matem., II Ser. T. XIV.

15. *Sur l'équation* $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Comptes Rendus, T. CXLVI.

16. *Saggio sulla teoria delle superficie a due dimensioni immerse in un iperspazio.* Ann. della Scuola norm. di Pisa, T. X.

17. *Sul problema di Fourier.* Atti della R. Acc. di Torino, T. XLIII.

18. *Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili.* Ivi.

19. *I problemi dei valori al contorno per le equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali.* Mem. della Soc. dei XL, III Ser. T. XVI.

20. *Caratteristiche multiple e problema di Cauchy.* Ann. di Matem., III Ser. T. XVI.

21. *Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse.* Id. T. XVII.

1909.

22. *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* Rend. della R. Acc. dei Lincei. I Sem, 1909.

1910.

23. *Sulle ipersuperficie dello spazio a quattro dimensioni che possono essere frontiera del campo di esistenza di una funzione analitica di due variabili complesse.* Id. T. XVIII.

24. *Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.* Parte I. Ivi.

1911.

25. *Sopra un teorema di esistenza per le soluzioni delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine.* Parte II. Id. T. XIX.

26. *Sur les équations différentielles périodiques.* Comptes rendus T. CLIII.

27. *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel Calcolo delle variazioni (gli integrali sotto forma non parametrica).* Rend. della R. Accad. dei Lincei, II Sem. 1911.

1912.

28. *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel Calcolo delle variazioni (gli integrali sotto forma parametrica).* Ivi. I Sem. 1912.

29. *Serie di Taylor e funzioni analitiche di più variabili.* Ivi.

30. *Sui criteri sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle variazioni.* Ann. di Matem., Serie II, T. XXI.

1914.

31. *Sopra un teorema del Calcolo delle Variazioni del sig. Lindeberg.* Rend. del Circolo matem. di Palermo. T. XXXVII.

1915.

32. *Sull'integrale della potenza.* Bollettino della « Mathesis ». T. VII.

33. *Sulla necessita della condizione di Weierstrass per l'estremo degli integrali doppi.* Rend. della R. Accad. dei Lincei, II Sem. 1915.

34. *Elementi della Teoria delle funzioni e Calcolo delle Variazioni.* Lezioni di Analisi superiore dettate nella R. Università di Genova nell'anno accademico 1914-15. Tip. Lit. Castello (*litogr*).

N.B. Nel precedente Elenco non furono registrate le recensioni inserite in questo *Bollettino* e parecchi *Corsi litografati di Analisi infinitesimale* tenuti nell'Universita di Genova, insieme a *Corsi di analisi superiore*, che l'A. manoscrisse, e che considerava come preparazione a un libro sulla teoria delle equazioni differenziali: libro, che forse si potrà, almeno in parte, ricostruire, e che avrebbe dovuto esporre in modo nuovo ed organico una teoria, che in generale vien trattata sotto punti di vista unilaterali.

Digitized by Google

Calcolo infinitesimale.

SALVATORE PINCHERLE — *Lezioni di calcolo infinitesimale,* dettate nella R. Università di Bologna, e redatte per uso degli Studenti — Bologna, Nicola Zanichelli, editore, 1915, pp. XV-774. (Prezzo L. 25).

In questi ultimi anni abbiamo avuto in Italia una ricca produzione di libri di Analisi matematica, concepiti e scritti italianamente, i quali, non solo hanno contribuito a liberare la nostra scuola da testi e da modelli forestieri, ma hanno portato oltre confine la voce dei nostri maestri.

Le *Lezioni di Analisi Infinitesimale* del DINI, scritte fin dal 1877-78, che, pur sotto modesta veste litografica, avevano prodotto così profondo rinnovamento nei metodi di indagine, di dimostrazione, di insegnamento in Italia e fuori, uscivano finalmente per le stampe (Pisa 1908-1915) e ci davano il Trattato classico di Calcolo Infinitesimale.

Quasi contemporaneamente ai primi due volumi di quest'opera, si pubblicavano nel Fascicolo 2° della edizione V del *Formulario Mathematico* (Torino 1908), il Calcolo Differenziale, il Calcolo Integrale, la Teoria delle Curve ed il Complemento di G. PEANO; notevolissimi per rigore logico e per copia di notizie storiche.

A queste opere, scritte con intenti prevalentemente scientifici, se ne aggiunsero altre più particolarmente indirizzate agli scolari ed alla scuola, fra le quali ricorderemo: le *Lezioni* e gli *Esercizi di Analisi Infinitesimale* di G. VIVANTI (Pavia 1911-1913), il *Corso di Analisi Infinitesimale* di G. BAGNERA (Palermo 1915) ed infine: le *Lezioni di Calcolo Infinitesimale* di S. PINCHERLE (Bologna, ottobre 1915).

Di questa ultima opera, appunto, daremo breve notizia.

*
* *

Il libro, come avverte l'A., è la genuina espressione del corso effettivamente impartito agli scolari del 1° biennio di matematica nella Università di Bologna, e suppone la conoscenza delle *Lezioni di Algebra Complementare,* dallo stesso A. pubblicate, (Bologna, 1906-1909) delle quali è diretta continuazione.

Comprende una Introduzione, e quattro sezioni, nelle quali, rispettivamente, si tratta del Calcolo differenziale, del Calcolo integrale, delle Applicazioni geometriche, delle Equazioni differenziali.

Chi volesse solo guardare alla architettura del trattato, potrebbe giudicare la Introduzione come troppo succinta, specialmente in alcune sue parti,

Digitized by Google

o, visto che nulla contiene che già non sia nelle *Lezioni di Algebra*, superflua. Risponde invece ad un giusto precetto pedagogico, poichè richiama e coordina i concetti di numero, di operazione, di insieme, di corrispondenza, di limite e di serie, i quali sono necessario fondamento di ogni teoria analitica.

La sezione I, incomincia con lo studio delle proprietà, relative al limite superiore (inferiore) di funzioni di una variabile in senso generale.

Il paragrafo seguente, che tratta della continuità, è notevole per la introduzione del teorema di BOREL, come lemma per la dimostrazione della continuità uniforme.

I giovani entrano così presto in possesso di una proposizione che, nel campo della scienza pura, s'è mostrata feconda di tanti utili risultamenti.

L'A., che è maestro di rara efficacia, facilmente riesce a render dalla cattedra, limpido e chiaro il processo di dimostrazione, manifesta la natura, direi quasi la necessità logica, dell'enunciato; ma, chi legge, prova in questo punto desiderio di concisione minore. Assai perspicuo invece è, sotto ogni riguardo, il paragrafo 3, dove, con molta opportunità, sono riunite le considerazioni sulle funzioni che hanno punti di discontinuità, o punti di infinito, o che sono date in intervalli di ampiezza infinita.

Il capitolo termina con un rapido cenno su la estensione a funzioni di variabile complessa, dei risultamenti conseguiti per funzioni di variabile reale.

*
* *

Il Cap. II, interrompe lo svolgimento della teorica generale, per riprendere lo studio di particolari funzioni, già trattate nel corso di Algebra.

Cioè delle funzioni razionali e delle più elementari funzioni rappresentabili da serie di potenze.

Le prime sono richiamate principalmenle per stabilire le formule che servono alla decomposizione di una frazione razionale in somme di frazioni semplici. Formule alle quali si giunge con procedimento un po' faticoso, ma in modo rigoroso, e completo.

Quello delle Serie di potenze è uno degli argomenti che l'A. predilige, egli qui riprende, con maggior copia di particolari e maggior scioltezza di metodo, la materia svolta nel corso di Algebra.

Giunge al concetto di derivata, per le serie di potenze, considerando prima la derivata formale, ottenuta applicando termine a termine la regola di derivazione, e giovandosi poi dello sviluppo del Taylor per dimostrare che la derivata formale non differisce dal limite del rapporto incrementale.

Digitized by Google

La strada è un po' lunga; ma facile, ed ha il vantaggio di non limitare il campo generale della variabilità complessa.

Lo sviluppo, in serie di potenze, delle funzioni esponenziale e logaritmica, lo studio delle proprietà fondamentali di queste funzioni si deducono molto semplicemente ed elegantemente dall'esame della equazione funzionale caratteristica delle funzioni esponenziali.

*
* *

La teoria generale è ripresa nel Cap. III, il quale tratta delle Derivate e dei Differenziali di una variabile.

Precede questo studio la introduzione del concetto di infinitesimo e l'esame delle principali proprietà relative all'ordine di infinitesimo.

I concetti di derivata e di differenziale si definiscono poi, contemporaneamente; il primo come limite del quoziente degli infinitesimi $\delta y : \delta x$, il secondo come parte principale dell'infinitesimo δy. La estensione della definizione di derivata per punti nei quali il limite del quoziente $\delta y : \delta x$ è infinito, viene fatta, al n. 138, *c)*, con l'assumere per valore della derivata in tali punti il limite del valore della derivata in punti vicini, e si ammette implicitamente che anche tale limite debba essere infinito.

Le proprietà e le regole pratiche del calcolo delle derivate e dei differenziali, sono molto chiaramente esposte nei pagagrafi 3° e 4° di questo capitolo.

*
* *

Il Cap. IV continua lo studio delle derivate e dei differenziali: contiene i teoremi di Rolle e del valore medio, tratta della derivazione successiva, ed infine si occupa della derivata dei determinanti, considerando specialmente le proprietà del determinante Wronskiano.

Lo sviluppo del Taylor, per funzioni di una variabile, occupa il Cap. V.

Tale sviluppo è noto fino dalle lezioni di Algebra, per polinomi e per serie di potenze; ma poichè i modi tenuti in questi casi particolari non potevano dar lume sul procedimento che serve nel caso generale che si ha in vista, il quesito è ripreso ex novo, ed è trattato col solito procedimento, che consiste nel trovare prima lo sviluppo accorciato, e nell'eseguire poi il passaggio al limite, supponendo infinitesimo il termine complementare.

La teoria delle funzioni di una sola variabile è completata, in questo Cap., con la esposizione della regola di L'Hôpital per il calcolo dei limiti di espressioni che si presentano sotto forma indeterminata, e con la ricerca degli estremi di funzioni esplicite.

Digitized by Google

*
* *

Lo studio delle funzioni di due o più variabili incomincia al Cap. VI, il quale è notevole per singolare lucidità di idee, chiarezza ed ordine di forma espositiva.

Il concetto di funzione differenziabile qui introdotto, mentre a tutta prima ha apparenza di superflua sottigliezza (dati gli scopi del libro) si dimostra poi di una incontestabile utilità pratica, sia per la maggiore uniformità e scioltezza che ne acquista il procedimento logico di molte dimostrazioni che occorrono nel seguito, sia per la semplicità e chiarezza che per suo mezzo si può dare agli enunciati di importanti proposizioni.

Il Cap. VII è riserbato alla trattazione rigorosa e completa degli argomenti relativi alle funzioni implicite. Un interessante anticipo della formula di derivazione si era ottenuta già, in modo formale, come applicazione di formule date in altra occasione (n. 252). Il teorema di esistenza giustifica l'uso di quelle formule ed offre un nuovo mezzo per ricavarle. Nella dimostrazione del quale teorema è da notare la maggior generalità che, senza nuocere alla chiarezza, ottiene l'A. col ricorrere direttamente alla formula del valor medio. Per tal modo infatti si rende inutile l'ipotesi della continuità per la derivata $F'(x)$ rispetto alla variabile indipendente, della funzione $F(xy)$, che, posta eguale allo zero, serve a definire la y come funzione implicita della x.

Non inutile forse sarebbe stato il ricordare, anche nell'enunciato, l'ipotesi della esistenza di un limite superiore finito per la stessa derivata $F'(x)$, nel campo che si considera, poichè le considerazioni fatte al n. 138, *c*), non escludono la possibilità di derivate infinite.

*
* *

Mentre lo sviluppo delle teorie riguardanti le funzioni di una sola variabile è preceduto dall'esame dei casi particolari più ovvi (funzioni razionali, serie di potenze), per le funzioni di due o più variabili l'A. che non è legato ad alcuna formula o preconcetto metodologico, ma che segue caso per caso la strada praticamente più opportuna, procede in senso inverso, trattando cioè subito e direttamente il caso generale, e facendo poi qualche applicazione a casi particolari.

Le serie di potenze di due o più variabili e le stesse funzioni razionali, non presentano infatti quel grado di semplicità che rende quasi intuitiva e spontanea la ricerca delle leggi generali di calcolo per i polinomi di una sola variabile.

Perciò anche lo sviluppo del Taylor per funzioni di più variabili non

Digitized by Google

è fatto precedere dalla esibizione di casi particolari notevoli, ma è direttamente ricavato nella sua forma generale; e non si dà, in seguito, che un cenno assai breve delle serie di potenze di due o più variabili.

Gli ultimi paragrafi del Capitolo, che termina il Calcolo Differenziale, contengono una trattazione, abbastanza estesa, condotta con chiarezza e rigore, dei problemi riguardanti gli estremi di funzioni di più variabili.

Il Calcolo integrale, incomincia, al Cap. IX, con la definizione di integrale definito e con lo studio delle principali proprietà della funzione integrale.

Questo Capitolo è certamente uno dei più notevoli del Volume; la chiarezza e l'ordine delle idee, il nesso logico rigoroso e spontaneo, fra le successive proposizioni, la forma perspicua e suggestiva, rendono la materia facile e piana; e, chi legge, si sente trascinare di deduzione in deduzione, senza provare difficoltà, e senza sforzo.

Il concetto di integrale definito è introdotto come limite di somme, seguendo in ciò l'uso che, dopo l'esempio del Dini, è diventato costante nelle scuole italiane. Nel nostro testo la trattazione è resa più agevole col premettere la considerazione più generale degli integrali superiore ed inferiore. L'esistenza dell'integrale definito si presenta come caso particolare (« il più interessante ed il più utile »).

E non è questa la prima volta in cui si prova coi fatti che le formule pedagogiche non vanno sempre prese in senso assoluto, nemmeno quando si tratta di introdurre concetti essenzialmente nuovi, fondamentali e difficili.

Su base così salda riesce facile all'A. il costruire le rimanenti parti del suo edificio. Ed infatti, con pari facilità di esposizione, vediamo trattato, nel Cap. X, il calcolo degli integrali e gli integrali generalizzati, e, nel Cap. XI, la effettiva integrazione delle funzioni di forma analitica più semplice.

L'argomento dei due ultimi capitoli della Sezione « *Integrazione nei campi a due dimensioni* », si presta assai bene ad una trattazione conforme al canone antico « dal noto all'ignoto », « dal particolare al generale ». E l'A. ci dà qui saggio di rigorosa e razionale applicazione di tale precetto.

Ce lo dice anzitutto l'ordinamento della materia: Integrali curvilinei - Integrali dipendenti da un parametro - Integrali doppi superficiali - Integrali doppi ridotti ad integrazioni successive - Integrali doppi generalizzati - Formule di Green - Integrali tripli di campo - Integrali tripli ridotti ad integrazioni successive - Cambiamento di variabili negli integrali tripli - Integrali multipli. Ed è notevole la uniformità di metodo e di modi con cui gli argomenti sono studiati nei successivi gradi di generalizzazione di concetto, o di estensione di campo di definizione. Così noi vediamo che lo studio

Digitized by Google

di integrali a limiti variabili è sempre fatto precedere da quello più particolare, di integrali a limiti costanti.

Questo procedimento è opportunissimo per gli integrali di funzioni dipendenti da un parametro, non solo per la graduazione delle difficoltà, ma anche pel fatto che certi risultamenti si verificano, in generale, solo nel caso dei limiti costanti. Utile sempre, ma non così necessario, negli altri casi, mentre la riduzione di un campo di forma qualunque a quello rettangolare circoscritto, può apparire artificiosa, e non raggiunge, in tutti i suoi passaggi, quel grado di persuasione e di evidenza, che forse si potrebbe avere dall'esame diretto della questione.

*
* *

La sezione III tratta delle Applicazioni geometriche, e la Sezione IV riprende lo svolgimento delle teorie analitiche, con lo Studio delle Equazioni differenziali.

Questo incomincia col Cap. XIX, nel quale si introduce la nozione di Equazione differenziale, se ne chiarisce la genesi, se ne addita lo scopo, ed in fine si dimostrano i teoremi di esistenza, argomenti cui spesso non si può (per la mancanza del tempo) dare, in iscuola, sviluppo adeguato alla loro importanza.

Lo studio delle equazioni del primo ordine incomincia da quelle il cui primo membro è un differenziale esatto, o può ridursi tale con un opportuno fattore integrante, facilmente calcolabile. Seguono poi le omogenee (che potrebbero ben dirsi di GABRIELE MANFREDI), quelle lineari (o di BERNOULLI), quelle di RICCATI, infine quelle di LAGRANGE e di CLAIRAUT.

Uno speciale paragrafo è dedicato alla ricerca degli integrali singolari.

Delle equazioni di ordine superiore, sono specialmente studiate quelle del 2^0 ordine (o facilmente riducibili al 2^0 ordine) e quelle lineari.

Infine si dà un breve cenno delle equazioni alle derivate parziali.

*
* *

Mi si consenta di chiudere questa rapida rassegna, la quale troppe cose ha lasciato delle bellissime contenute nel libro, con l'augurio che l'A. voglia raccogliere il contenuto delle sue lezioni di Algebra e di Calcolo in un unico libro di Istituzioni Analitiche, il quale continui la tradizione nostrana, completando la serie, inaugurata da M. G. AGNESI, e continuata da RICCATI, in questa nostra Università, dove con B. CAVALIERI si iniziava la nuova scienza degli Indivisibili e con GABRIELE MANFREDI si raccoglieva in dottrina e si pubblicava il primo libro su le equazioni differenziali.

ETTORE BORTOLOTTI.

Digitized by Google

Algebra geometrica.

F. ENRIQUES. — *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, pubblicate per cura del D.r O. Chisini. 8^0 gr. p. XIV + 397. Bologna. N. Zanichelli. (Prezzo L. 12).

1. La geometria degli enti algebrici, nelle sue parti più elevate, ha avuto finora la sua maggiore consacrazione per così dire « trattatistica » nei ben noti libri di Salmon e Clebsch-Lindemann, i più meritamente divulgati fra i nostri studenti universitari, così da dire che fin qui non vi sia stato scolaro il quale seguendo, assiduamente, un corso di Geometria Superiore non abbia sentito il desiderio (se non il bisogno) di far correre parallela al proseguimento del corso la lettura, o almeno la consultazione, delle due opere in parola. Ma anch'esse, come tutte le cose di questo mondo e malgrado i pregi indiscutibili (non scompagnati da qualche difetto) risentono il logorìo dei non pochi anni trascorsi da che furono pensate e scritte (nè, d'altra parte, è soltanto da adesso che una tale decadenza si è resa manifesta).

Fu dunque ottimo proposito meditare ed elaborare un piano di pubblicazione atto a rispecchiare, nella fase attuale, lo stato delle nostre conoscenze geometriche, nel campo algebrico, col nobile scopo (fra gli altri) di avviare alla ricerca scientifica i nostri laureandi in matematica. Si è accinto a questo scopo l'A. del libro che vogliamo ora esaminare con qualche dettaglio. Esso non è che il primo volume (saggio invero promettente!) dell'intera opera che l'A. intende sistematicamente di sviluppare pubblicandola.

2. Il volume attuale è diviso in due libri. Il primo serve d'introduzione: il secondo è dedicato ad illustrare il principio di corrispondenza e le sue principali applicazioni. Le teorie introduttorie contenute nel primo libro sono raggruppate in tre capitoli di cui il primo è destinato alla interpretazione geometriaca delle equazioni algebriche ad una incognita, mediante la teoria dei gruppi di punti sulla retta, facendo corrispondere ad ogni radice dell'equazione un punto sulla retta medesima. I primi concetti presentati sono quelli inerenti agli invarianti e covarianti (e in modo più chiaro di quel che si faccia, ad es., nel ricordato Clebsch-Lindemann). A questi primi concetti seguono le espressioni delle forme invariantive dando come esempio tipico il discriminante. L'applicazione immediata all'equazione di quarto grado porge all'A. l'opportunità di sviluppare la teoria geometrica delle quaterne di punti mettendo in evidenza il gruppo delle proiettività binarie rispetto al

Digitized by Google

quale una quaterna è invariante (con speciale riguardo al caso armonico e a quello equianarmonico). Ne deriva la risoluzione delle equazioni di 3^0 e 4^0 grado in modo così originale da costituire uno dei punti più notevoli di tutta l'opera. Per risolvere l'equazione di terzo grado l'A. comincia dal caso binomio $x^3 = t$ e dal considerare i due punti 0 e ∞ come quelli che insieme alle tre radici formano due quaterne equinarmoniche. Allora, nel caso generico, si cercano i due punti analoghi e si viene così condotti alla risolvente di secondo grado da cui agevolmente si ricava la formula ben nota. Quanto all'equazione di quarto grado un ingegnoso procedimento conduce l'A. a formare razionalmente la risolvente cubica rappresentante tre punti i quali col punto all'infinito compongono una quaterna proiettiva a quella dell'equazione data. Ciò permette all'A. di scrivere le equazioni delle tre involuzioni che trasformano la quaterna dell'equazione suddetta in se medesima da cui, risolvendo due equazioni di secondo grado, si perviene alla formula conosciuta. Così la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado viene a dipendere dall'ausilio che reca la interpretazione geometrica. Il rimanente del capitolo riguarda il calcolo simbolico delle forme invariantive e il modo di passare dai coefficienti simbolici agli effettivi. Questo dà occasione di tornare agli invarianti e covarianti delle binarie cubiche e quartiche ritrovando, per altra via, le espressioni dei principali di essi e ponendole in relazione con i nuovi simboli introdotti. Il capitolo finisce con una Nota storica sulla teoria invariantiva nella quale sono accennate due questioni fondamentali e cioè il problema delle condizioni di equivalenza per due forme, o sistemi di forme (dal punto di vista delle trasformazioni proiettive) espresse uguagliando degli invarianti, o annullando identicamente gli stessi covarianti (teorema di Gram) e il problema cosidetto della base, ossia di un numero finito di forme invariantive le quali combinate linearmente possano rappresentare ogni altra forma invariantiva possibile. In questa breve, ma succosa, esposizione della teoria delle forme binarie manca la teoria della polarità (pure così feconda): forse è intendimento dell'A. di riservarla (anche nel campo binario) al secondo volume che sappiamo già in corso di stampa?

3. Il capilolo II (del 1^0 libro) è specialmente dedicato a due diverse interpretazioni geometriche dell'equazione algebrica $f(x, y) = 0$. Invero se x e y si riguardano come coordinate cartesiane di un punto in un piano, l'equazione rappresenta una curva, ma se invece x e y si pensano come ascisse di elementi corrispondenti di due forme di prima specie l'equazione in parola rappresenta una corrispondenza algebrica fra le forme suddette.

Digitized by Google

Secondo la prima interpretazione l'A. descrive le più semplici proprietà delle curve algebriche piane inerenti all'ordine, alla classe, ai punti doppi, tangenti doppie ecc., senza entrare in troppi particolari (chè l'argomento verrà ripreso nel capitolo 2° del II libro). Piuttosto egli si sofferma sopra i sistemi lineari di curve assegnando come proprietà caratterizzante la linearità di un sistema, quella di contenere il fascio individuato da due sue curve qualunque. La teoria delle funzioni invariantive delle binarie viene qui estesa, nel campo ternario, descrivendo le proprietà essenziali degli invarianti, covarianti e contravarianti di una curva algebrica e dando infine l'esempio della Hessiana la cui espressione viene calcolata in coefficienti simbolici. Segue un breve cenno sul principio di trasporto di Clebsch (troppo rapido, invero, quando se ne consideri tutta la importanza quale strumento di calcolo per il passaggio dal campo binario a quello ternario!).

Indicando con m, n i gradi rispettivi in $f(x,y)=0$, questa, nella seconda interpretazione data dall'A., rappresenta una corripondenza algebrica $[m,n]$ fra punti di una retta. L'A. segnala anzitutto i casi degeneri e dopo mette in relazione la corrispondenza suddetta con la sua curva rappresentativa la quale può essere quella descritta mediante la stessa equazione $f(x,y)=0$ riguardata come cartesiana, ovvero in un secondo modo che, in certi casi, può riuscire di maggiore utilità. Basta, perciò, considerare x,y come coordinate proiettive di raggi in due fasci, fra i quali sia istituita la corrispondenza $f(x,y)=0$, e assumere, come sua curva rappresentativa, il luogo geometrico dei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti di due fasci. Essa risulta di grado $m+n$ e possiede due punti m^{plo}, n^{plo} nei centri dei due fasci. Il caso più semplice è quello in cui $f(x,y)$ sia bilineare e quindi la corrispondenza si possa interpretrare come una proiettivittità e la curva rappresentativa, in conseguenza, sia una conica. Da qui è breve il passo allo studio delle corrispondenze quadratiche e delle loro proprietà principali.

L'ultima parte di questo capitolo contiene alcuni esempi ben appropriati di ciò che l'A. chiama « Geometria astratta » e di cui il più semplice è costituito dalla legge di dualità dello spazio per la quale, com'è ben noto, ogni proposizione, che non implichi nozioni metriche, si muta in un altra (duale) per lo scambio punto-piano. Ciò dipende dal fatto che il gruppo dei postulati della geometria spaziale di posizione gode invarianza rispetto allo scambio suddetto. La generalizzazione di un tale concetto si presenta quasi spontanea. Sostituendo a certi elementi geometrici fondamentali (quali ad es. punti, rette, piani) altri enti geometrici fra i quali intercedano le stesse

Digitized by Google

relazioni logiche rappresentate dai postulati, sarà possibile passare da un gruppo di proposizioni inerenti a punti, rette e piani, al gruppo corrispondente di proposizioni relative ai nuovi enti. Un esempio assai espressivo (oltre quello già citato della dualità spaziale) è costituito dalla geometria delle coppie di punti sulla retta interpretata come geometria del piano punteggiato. Basta perciò (secondo Hesse) riferire le coppie di punti su di una retta e le involuzioni che essi formano rispettivamente ai punti e alle rette di un piano, osservando che il riferimento è lecito in base ai postulati che riguardano la geometria delle coppie suddette e la geometria dei punti in un piano. Allora ogni proposizione inerente al piano punteggiato si muterà in una proposizione inerente alle coppie in discorso con l'evidente vantaggio che dipende da una tale trasformazione. Altri esempi dell'applicazione di un tale principio si ottengono ricorrendo alla Geometria iperspaziale di cui l'A. dà i concetti fondamentali applicandoli poi allo spazio rigato col metodo delle coordinate di Plücker. Alcune notizie storiche intorno alla geometria degli iperspazi e al suo svilupparsi chiudono il capitolo.

4. Il capitolo seguente (III del primo libro) è una Nota che contiene varie osservazioni sopra il significato della espressione « in generale » (così spesso e variamente usata nella letteratura matematica) e sulle conclusioni tratte da computo di costanti. L'A. comincia dal rilevare come la qualifica di generale applicata ad una equazione non abbia senso alcuno finchè non venga prestabilito sotto quale aspetto l'equazione medesima deve essere considerata. Ricorrendo alla doppia interpretazione geometrica della $f(x,y)=0$ data nel capitolo precedente e limitandosi al caso più semplice $m=n=1$, si può dire che, interpretando la equazione in parola come quella di una proiettività, la sua forma più generale possibile è la relazione bilineare del tipo:

$$axy+bx+cy+d=0.$$

Se invece la stessa equazione si vuole interpretarla come quella di una conica essa non appartiene più alla forma piu generale possibile, perchè mancano i termini in x^2 e y^2. Così la stessa equazione apparisce generica e non generica a seconda del significato geometrico che le viene attribuito. Si entra quindi nel campo dei paradossi: premesse alcune considerazioni sopra le classi e le successioni di elementi l'A. presenta i cosidetti « paradossi dell'infinito » a cui fa seguito un breve cenno sulla teoria degli insiemi. Benchè l'ordine d'idee in cui queste considerazioni si svolgono non abbia una stretta connessione con l'equazioni algebriche e quindi esca

Digitized by Google

dai limiti imposti al libro dal suo titolo, pure è necessario riconoscere quale attrattiva, anche didattica, sia sempre riposta nella storia dell'errore e quanto il chiarirlo giovi agli ulteriori sviluppi della scienza. Anche il principio del cosidetto « computo di costanti » così bene spesso adoperato, può condurre a conclusioni errate se non vengono osservate certe cautele. Una proposizione dell'A. che può essere utile in questo campo è la seguente. Sieno V_n, V_m, due varietà di dimensioni n, m, fra cui esista una corrispondenza irriducibile così che a un punto generico di V_n corrispondano ∞^r punti di V_m e viceversa a un punto generico di V_m corrispondano ∞^s punti di V_n. Ebbene una tale corrispondenza può rappresentarsi mediante una varietà che ha la dimensione $n+r$, ovvero $m+s$, per cui $n+r=m+s$. Ecco una applicazione immediata. Si cerca la dimensione dello spazio rigato che assumeremo come varietà V_n. Consideriamo perciò la varietà V_3 formata dalle stelle di raggi e fra V_n e V_3 istituiamo la corrispondenza per la quale un elemento di V_n (cioè una retta) e un elemento di V_3 (ossia una stella) si riguardino corrispondenti allorchè la retta passa per il centro della stella. Allora a un elemento di V_3 corrispondono ∞^2 elementi di V_n e a un elemento di V_n ∞^1 elementi di V_3: si ha quindi $m=3$, $r=1$, $s=2$ e per conseguenza

$$n+1=3+2$$

cioè $n=4$. Altri esempi di uguale specie riguardano il sistema di tutte le curve piane di ordine n, quello delle cubiche gobbe ecc. ecc.

Un altro principio da tener presente in ogni computo di costanti è quello che l'A. denota col nome di Plücker-Clebsch e si formula così: « *Se un sistema di n equazioni con n incognite in cui figurano coefficienti a_r variabili è incompatibile per valori generici delle a_r, ogni volta che esso divenga compatibile per valori particolari delle a_r, divieue contemporaneamente indetermiuato, cosicchè il sistema sarà compatibile se sia compatibile e determinato per valori speciali dei coefficienti a_r* ». Alcuni esempi bene appropriati servono a mettere in evidenza l'applicazione di questo principio. Però, in fine al capitolo, l'A. cita come esempio di sofisma una proposizione in cui, per vero dire, il sofisma non si vede. Ecco la proposizione: « *in ogni terna di punti formante un gruppo armonico col punto all'infinito, ciascun punto della terna è punto medio del segmento individuato dagli altri due* ». Ora per invalidare questa proposizione non c'è bisogno delle considerazioni dell'A. basta osservare che il coniugato armonico del punto all'infinito non è uno qualsiasi dei punti della terna, ma quello che è separato dal punto improprio mediante gli altri due e quindi è quest'ultimo soltano che divide a metà il segmento degli altri due.

Digitized by Google

5. Siamo così al II libro destinato ad illustrare il principio di corrispondenza di Chasles e le sue principali applicazioni.

Anche questa seconda parte del volume è divisa in tre capitoli di cui il primo s'intitola dalle involuzioni e dai gruppi finiti di proiettività binarie. A tale scopo l'A. riprende la interpretazione di $f(x,y)=0$ quale corrispondenza $[m, n]$ di punti sulla retta secondo le vedute già esposte nel primo libro. La ricerca dei punti uniti conduce al principio di corrispondenza che va ordinariamente sotto il nome di Chasles sebbene la priorità debba farsi risalire a De-Jonquières, secondo le notizie storiche dell'A., ed è ben noto come il nostro Cremona si sia valso sistematicamente di questo principio nella sua ormai classica « *Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane* ». Le cautele che debbono seguirsi per la giusta applicazione di questo principio vengono segnalate dall'A. prima in riguardo al punto improprio della retta, poi in riguardo al modo di valutare la moltiplicità secondo la quale un punto può appartenere al gruppo di punti uniti (regola di Zeuthen).

Viene poi considerato il caso delle corrispondenze simmetriche rappresentate dall'annullarsi del polinomio $\Sigma a_{ik} x^i y^k$ dove i simboli a_{ik}, a_{ki} sono equivalenti e circa i relativi punti uniti si osserva che un punto il quale coincida con due almeno dei corrispondenti conta almeno due volte nel gruppo dei punti uniti. Un altro caso particolarmente notevole è quello delle involuzioni d'ordine n. Allora l'equazione relativa è del tipo $t=\varphi(x)$ ove φ è funzione razionale fratta di grado n in x e i gruppi (di n punti ciascuno) della corrispondenza possono chiamarsi altrettanti gruppi di livello per la funzione φ. Gli n zeri e gli n poli possono servire a determinarla a meno di un fattore esterno. In tal guisa una involuzione di ordine n apparisce costituita da una serie algebrica semplicemente infinita di gruppi di n punti tali che ogni punto appartenga a un gruppo e sorge quindi la questione di sapere se una tale proprietà possa riguardarsi come caratteristica. Alla quale domanda l'A. risponde affermativamente col teorema di Lüroth. Le involuzioni con punti fissi e con punti multipli conducono l'A. a dimostrare (come elegante applicazione) il noto teorema di Bertini sui punti multipli delle curve di un sistema lineare (che debbono necessariamente cadere nei punti base del sistema). I punti doppi di una g'_n si possono dare ad arbitrio dopo di che, in generale, vi è un numero finito di g'_n a cui essi sono relativi come anche risulta da una opportuna rappresentazione iperspaziale. Dopo un breve cenno sulle involuzioni composte, l'A. definisce le proiettività binarie cicliche dimostrando poi che i

Digitized by Google

cicli di una tale proiettività costituiscono i gruppi di una involuzione g'_n e facendone l'applicazione al caso speciale di $n = 4$.

Il capitolo ha termine con la teoria dei gruppi finiti di proiettività binarie che, per originalità di vedute, costituisce un altro dei punti più interessanti dell'opera. Eccone un rapido cenno. Se su di una retta r deve esistere un gruppo finito di n proiettività, un punto generico A_1 verrà trasformato in altri $n-1$ punti $A_2 A_3 \dots A_n$ così che il gruppo $A_1 A_2 \dots A_n$ può essere determinato da uno qualunque di essi. Al variare di A_1 si ottiene quindi una serie semplicemente infinita di gruppi per i quali le condizioni caratteristiche del teorema di Lüroth sono adempiute. Dunque questa serie è una g'_n. Ora se in questa g'_n ci sono r gruppi dotati rispettivamente di $\frac{n}{\nu_1}, \frac{n}{\nu_2}, \dots \frac{n}{\nu_r}$ coincidenze dei relativi ordini $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_r$, il numero totale di queste coincidenze deve essere uguale al numero dei punti doppi che è $2n-2$. Dunque:

$$2n-2 = \sum_{i=1}^{i=r} \frac{n}{\nu_i}(\nu_i - 1)$$

cioè:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{1=i}^{i=r} \left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right)$$

la quale deve essere soddisfatta da numeri interi. Le soluzioni di questa equazione corrispondono ai cinque tipi conosciuti di gruppi di proiettività binarie la cui costruzione effettiva viene poi attuata dall'A. con ingegnose considerazioni geometriche e qualche breve calcolo ausiliario. La genialità dell'argomento induce l'A., in una breve nota storica, a tornarvi sopra considerandolo da un nuovo punto di vista (esclusivamente geometrico) e che meriterebbe, davvero, un maggiore sviluppo come risulta dalle considerazioni seguenti (non più ampie di quelle dell'A). Rappresentate alla maniera di Stephanos le proiettività binarie, riguardate come elementi, sui punti dello spazio a tre dimensioni, l'A. osserva che quelle degeneri corrispondono ai punti di una quadrica. Allora se le proiettività in parola si pensano come operazioni destinate a trasformare le proiettività-elementi, ne segue che le proiettività-operazioni vengono rappresentate mediante omografie spaziali trasformanti in se la quadrica suddetta e un punto: quello che corrisponde alla proiettività identica.

Con una opportuna trasformazione omografica la ricerca in discorso può ridursi a quella delle omografie spaziali capaci di trasformare in sè stessa una sfera e il suo centro, cioè alle rotazioni della sfera in sè stessa.

Digitized by Google

Così i gruppi di proiettività binarie si specchiano nei gruppi delle rotazioni suddette e si possono ritrovare per altra via i tipi già incontrati.

6. La teoria elementare delle curve algebriche piane, già iniziata nel primo libro, viene ripresa dall'A. nel II capitolo del secondo libro cominciando dal dimostrare, in modo rigoroso e veramente completo, il teorema di Bezout che cioè due curve piane degli ordini m ed n hanno mn punti comuni ed estendendo poi il teorema, nella sua forma più generale, alle $m_1 m_2 .... m_n$ intersezioni di n varietà ad $n-1$ dimensioni in un iperspazio ad n dimensioni. Un caso speciale del teorema di Bezout si ha quando le due curve sono di uguale ordine n e quindi abbiano n^2 punti comuni i quali compongono i punti base del fascio individuato dalle due curve. L'A. presenta quindi la proprietà caratteristica del fascio: se cioè, un sistema algebrico ∞^1 di curve irriducibili è tale che per un punto generico del piano passi una sua curva, il sistema è un fascio, la quale proprietà viene poi estesa per induzione a sistemi lineari qualsiasi. Il caso delle curve riducibili permette poi all'A. di considerare il secondo teorema di Bertini sopra i sistemi lineari di curve riducibili (le parti variabili di esse sono irriducibili, ovvero sono composte con le curve di un fascio). Viene segnalato a questo punto il cosidetto paradosso di Cramer: dal momento che due curve di ordini n si tagliano in n^2 punti ne segue che per tali n^2 punti passano infinite curve (di un fascio) quando anche $n^2 > \frac{n(n+3)}{2}$ essendo $\frac{n(n+3)}{2}$ il numero dei punti che individuano una curva di ordine n. Il paradosso viene chiarito osservando (come è ben noto) che il passaggio per essi impone alla curva condizioni lineari, fra i suoi coefficienti, le quali non sono tutte indipendenti. L'esempio più semplice è realizzato dai nove punti base di un fascio di cubiche di guisa che tutte le cubiche che passano per otto punti passano in conseguenza per un nono punto. Una elegante applicazione di quest'ultima proprietà è la nota dimostrazione (di Plücker) del teorema di Pascal sull'esagrammo mistico. Le considerazioni che hanno servito a chiarire il paradosso di Cramer vengono poi estese a casi più generali che riguardano i gruppi di punti comuni a due curve, mediante i teoremi di Gergonne e di Jacobi, i quali vengono dopo riassunti dall'A. nella nota proposizione la quale si può riguardare come il fondamento della « geometria sopra una curva » e che è la seguente: « *Se* $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$, *sono le equazioni di tre curve degli ordini* m, n, p, *e se la terza passa per gli* mn *punti comuni alle prime*

Digitized by Google

due, allora il polinomio ψ *si può riguardare come una combinazione lineare degli altri due* f *e* φ *di guisa che si può scrivere*

$$\psi = Af + B\varphi$$

dove A *e* B *sono rispettivamente degli ordini* $p-m$, $p-n$ (e $p \geq m$, $p \geq n$)».
Ordinariamente si fa discendere da questa proposizione il « teorema del Resto » che si può riguardare come il teorema introduttorio alla « geometria sopra una curva ». Ed è perciò che l'A. si ripromette di tornare sulla proposizione in parola svolgendo nel 3° volume, che sta preparando, le proprietà delle curve dal punto di vista della invarianza per trasformazioni birazionali.

Seguono alcune generazioni proiettive delle curve fra cui quella di Steiner mediante fasci proiettivi. Dopo di che l'A. passa a dimostrare le formule di Plücker le quali collegano le singolarità e le caratteristiche di una curva algebrica. L'A. coglie quindi l'occasione di segnalare il paradosso di Poncelet sulla classe e il modo col quale si chiarisce.

Le proprietà generali esposte sin qui per una curva d'ordine qualunque trovano poi la loro immediata applicazione al caso particolare della cubica alla quale l'A. consacra un intiero paragrafo. Esso contiene, anzitutto, la nozione dell'invariante assoluto mediante il valore costante del birapporto delle quattro tangenti alla cubica condotte da un suo punto. Seguono le proprietà fondamentali dei flessi e relative polari armoniche, dei fasci sizigetici ecc. Dalle proprietà sopra i sistemi di coniche biosculatrici l'A. fa discendere le considerazioni intorno ai punti sestatici. Il paragrafo termina con la riduzione dell'equazione alla forma canonica e con un rapido cenno di altre proprietà sulle quali l'A. tornerà nei seguenti volumi.

Riprendendo la teoria generale, dalle formule di Plücker l'A. desume una proprietà caratteristica del genere di una curva affermando che la classe n' e $2n+2p-2$ dove n è l'ordine e p è il genere purchè siano contate come tangenti anche le rette che vanno alle cuspidi (il che è lecito perchè i punti di una curva, nell'intorno di una cuspide, appartengono a un solo ramo). Per giungere poi alla definizione consueta di genere, l'A. dimostra come ogni curva le cui coordinate siano funzioni razionali di un parametro, abbia un massimo numero di punti doppi compatibile con la condizione di essere [illegible]. Dimostrato così che una curva di ordine n può [illegible] punti doppi senza spezzarsi, ne segue la nota [illegible] genere e come il numero dei punti doppi che mancano alla [illegible] massimo possibile di punti doppi per una curva d'ordine

Digitized by Google

(il che spiega l'origine della denominazione inglese di « deficienza »). La importanza di questo nuovo ente viene messo subito in evidenza dall'A. dimostrandone la invarianza per trasformazioni quadratiche e riguardandolo dopo come un carattere della corrispondenza rappresentata da $f(x, y) = 0$.

Alcune osservazioni sopra le serie ∞^1 di curve porgono all'A. l'occasione di entrare nella teoria della quartica piana, pensata come inviluppo di coniche, e conseguentemente nelle più antiche e conosciute proprietà delle bitangenti, per lo studio sistematico delle quali l'A. si è limitato ai metodi di Steiner, di Hesse, di Aronhold tacendo gli altri, ad es. di quello (forse il più fecondo) che venne iniziato da Kummer e proseguito da altri autori e che consiste nel riguardare la quartica come sezione piana di una superficie di Kummer.

7. L'ultimo capitolo è una Nota sulle funzioni algebriche e sulle rappresentazioni reali dell'immaginario. Premesso un cenno storico riguardante le rappresentazioni reali, più usate dei numeri complessi, l'A. uscendo dal campo strettamente algebrico, espone le proprietà fondamentali delle funzioni di variabile complessa per passare poi al caso delle funzioni algebriche. Alcune considerazioni di geometria sintetica inducono l'A. a trattare dei cosidetti Porismi di Chasles nell'intento di chiarirne la portata e di mettere bene in evidenza l'ufficio importante che essi hanno avuto nello sviluppo sintetico della geometria algebrica pur quando ancora non veniva bene precisato il loro significato nei lavori ormai classici di Poncelet, Chasles, Cremona.

Il capitolo termina con la teoria delle superficie di Riemann quali rappresentazioni reali di tutti i punti (reali e complessi) delle curve algebriche piane e con la conseguente trattazione dell'*Analysis situs* ha termine anche il libro.

8. Ricapitolando un giudizio riassuntivo, si può dire che il pregio principale del presente volume è l'originalità. Se la maggior parte delle proposizioni che contiene non è nuova (il che è ben naturale dato il carattere del libro e lo scopo che si propone) quasi tutte le dimostrazioni sono nuove: quando non lo sono e ricalcano in modo vieto vecchi schemi, ciò viene fatto quasi sempre col proposito di rilevare qualche punto debole, o qualche lacuna, e di indicare il modo di rimediarvi. I raffronti, i passaggi dall'una all'altra teoria, i vari modi con i quali questioni che appariscono secondarie possono servire a illuminare questioni principali (le cosidette « luci di fianco ») sono assai frequenti. Alcune dimostrazioni sono appositamente dichiarate incomplete, altre appena abbozzate (quanti soggetti di dissertazioni di laurea!).

Digitized by Google

Consegue da tutto ciò quell'azione nobilmente suggestiva che è l'ideale di un libro e che specie sulle giovani menti dei discenti (quando siano degnamente preparate) può esercitare una salutare influenza additando e avviando nell'arduo ma attraente cimento della ricerca scientifica.

E. CIANI.

Pubblicazioni recenti sulla Storia della Matematica.

H. G. ZEUTHEN. *Hvorledes mathematiken i tiaen fra Platon til Euklid ölev rationel videnskab. Avec uu résumé en français.* D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk, eg mathem. Afd. 8 Raekke, T. I, pag. 199-381.

Questa estesa e profonda memoria—sulla riforma subìta dalla matematica passando da Platone ed Euclide e grazie a cui essa divenne una scienza razionale—dovuta al più profondo conoscitore che oggi esista della matematica greca, è frutto di estesi lavori in cui ebbero la loro parte storia e filosofia, logica e matematica, fatti da chi, mentre aveva l'occhio rivolto alle fatiche degli antichi, non dimenticò i più recenti portati della critica intorno ai fondamenti della geometria. Con l'augurio che un traduttore la ponga presto alla portata di tutti, riferiamo i titoli dei sedici capitoli che la compongono:

I. Sullo studio comparato della storia delle matematiche. II. La matematica come scienza di ragionamento. III. Le domande rivolte da Platone alla matematica in quanto essa è una scienza razionale. IV. Il metodo analitico; gli Elementi. V. I matematici che realizzarono la riforma platonica. VI. Imagini intuitive e primitive; intervento del senso della vista. VII. Spostamento delle figure prima della riforma platonica; strumenti geometrici. VIII. I movimenti in Euclide. IX. Similitudine delle figure. X. Origine della nozione di angolo. XI. Generalizzazione delle dimostrazioni; ricerche infinitesimali. XII. Generalizzazione degli enunciati; equazioni quadratiche. XIII. L'idealità delle figure geometriche. XIV. La stereometria. XV. Euclide ed i suoi Elementi. XVI. La sorte degli elementi di Euclide.

D. E. SMITH and J. GINSBURG. *Rabbi ben Ezra and the Hindu-Arabic Problem.* The American Mathematical Monthly. March 1918.

Per agevolare la risoluzione delle importanti questioni storiche relative alla penetrazione in Europa della scienza araba viene qui presentata una traduzione dell'ebraico, corredata da svariati commenti, del brano relativo di un'opera del noto scrittore Abraham ibn Ezra.

H. SUTER. *Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloide.* Sitzungsber. der phys. mediz. Sozietät in Erlangen, T. 48, 1916.

Con questo lavoro il dotto orientalista-matematico soddisfa il desiderio da noi espresso annunciando un precedente suo scritto sopra la scienza araba (v. questo *Bollettino,* T. XIX, 1917, p. 93). Rileviamo essere suo convincimento che gli Arabi non conobbero la memoria d'Archimede *Sopra i conoidi e gli sferoidi;* tuttavia applicarono il « metodo di esaustione » insegnato loro dagli *Elementi* di Euclide. Le produzioni arabe ora poste a

Digitized by Google

disposizione di tutti, assieme ad altra fatta conoscere dallo stesso Suter nel T. XII della « Bibliotheca mathematica », rappresentano i frutti più importanti dell'attività geometrica spiegata dagli Arabi nei secoli IX-XI e si possono riguardare come uno dei ponti che, dagli antichi procedimenti usati dai Greci, guidarono a quelli di Luca Valerio, Cavalieri, Keplero e Wallis.

J. M. CHILD, *Leibniz in London. With critical Notes and Translations of Leibniz Manuscripts alluded to by Dr. Gerhardt.* The Monist, October 1917.

È la traduzione di un articolo pubblicato dal Gerhardt nel 1891, fatta con l'intento di criticare la maggior parte delle interpretazioni proposte e confutarne le conclusioni; lo spirito che anima il Child è diametralmente opposto a quello ispiratore del Gerhardt; ma avendo egli pubblicati tutti i documenti capaci di gettar luce sopra la questione controversa, il lettore può da sè formarsi un concetto al riguardo. Da pubblicazioni di questa specie, e soltanto di questa, si debbono attendere gli elementi necessari per decidere definitivamente la questione celebre sopra la scoperta del Calcolo infinitesimale.

A. FAVARO — *Un « conservatore » dello Studio di Padova eletto dal Consiglio dei Dieci nel 1524.* Nuovo Archivio Veneto, T. XXXIII, 1917.

» — *Ancora del tentativo di procurare una nuova emigrazione di scolari dallo Studio di Bologna a quello di Padova intorno alla metà del Secolo XIV.* Atti e Memori della R. Deput. di Storia Patria per le Romagne. Ser. IV, T. VII, 1917.

Sono due contributi alla storia delle Università italiane, le quali porgono notizie intorno a procedimenti governativi oggi totalmente ignoti.

A. CARDOSO PEREIRE — *Notas sobre Vernier.* Annaes scientificos de Academia Polytechnica de Porto. Vol. XI, 1916.

Della rarissima opera di P. Vernier, *La construction, l'usage et les proprietez du quadrant nouveau de mathématiques* (Bruxelles, 1631) viene data una descrizione ed esposto il contenuto in base all'esemplare che se ne trova alla Biblioteca nazionale di Parigi.

L. C. KARPINSKI — *Algebraic developements among the Egyptians and Babylonians.* The American mathematical Monthly, Giugno 1917.

Introduzione. Concetti algebrici in Egitto. Concetti algebrici in Babilonia. Conclusione: « Misurare l'entità del debito supera le nostre forze, non riconoscere il debito della Scienza matematica moderna verso gli scienziati egiziani e babilonesi non è che rendere quanto è dovuto ».

G. GIOVANNOZZI — *Scolopi Galileliani.* Lettura fatta alla Società Colombaria il 23 Maggio 1915. Pubblicazioni dell'Osservatorio Ximeniano, n. 124 (Firenze 1917).

Otto personaggi appartenenti all'ordine religioso delle Scuole Pie s'incontrano nel Carteggio di Galileo facente parte dell'edizione nazionale; un nono ebbe relazioni con quel grande e con la sua scuola. Di tutti sono date esatte notizie, in parte attinte all'archivio di quell'ordine, alcune delle quali portano a rettificare dati e fatti che ritenevansi a torto conformi al vero; onde il presente scritto va tenuto presente da chiunque studierà in avvenire la storia della scienza italiana, durante il Secolo XVII.

Digitized by Google

D. GAMBIOLI — *La controversia sull'esilio di Guidobaldo del Monte, l'illustre matematico marchigiano.* Atti e memorie della R. Dep. di Storia patria per le Marche, 1916.

In questo breve scritto l'A. — dopo di avere ricordate le principali date relative all'esistenza del celebre matematico pesarese — invita ad uno studio esauriente della questione se, come alcuno opina, egli fu esiliato per qualche tempo nel suo feudo di Mombaroccio,

E. BORTOLOTTI — *I segni numerali romani nella scuola.* Bollettino della Mathesis, Anno IX, 1917.

LUISA VIRGILIO — *Ancora sui segni numerali romani.* Id.', Anno X, 1918. Critiche, repliche e ulteriori sviluppi relativi ad un lavoro di cui si è parlato in questo *Bollettino*, Anno 1917, p. 91.

G. LORIA — *Guglielmo Libri come storico della scienza.* Atti della Società ligustica di Scienze nat. e geogr. T. XXVIII, 1917.

L'A., lasciando in disparte quanto concerne le note accuse rivolte al celebre storico della matematica italiana, ne esamina tutta la produzione letteraria, dividendo la trattazione nei seguenti paragrafi: *G. Libri durante il suo primo trentennio. La dimora in Francia di G. Libri. Scritti di G. Libri sopra la storia scientifica dell'Italia. Ricerche del Libri sopra Fermat. Scritti vari di G. Libri. Le polemiche scientifiche di G. Libri. La catastrofe.*

F. AMODEO — *Ottavio Colecchi.* Atti dell'Accademia Pontaniana, T. XLVII, 1917, p. 17.

Il pensatore di cui è qui narrata con ogni diligenza la vita ed è descritta l'opera scientifica a torto è noto più come filosofo che come matematico; è da sperare ed augurare che lo scritto dell'Amodeo lo collocherà nella debita luce. Nato a Pescocostanzo (prov. di Aquila) ai 19 Settembre 1773, morì a Napoli il 25 Agosto 1847. Vestì l'abito domenicano e poi se lo tolse; occupò a varie riprese cariche nel pubblico insegnamento e poi ne fu dispensato per ragioni politiche; a Napoli, a Roma ed a Pietroburgo ottenne onori, destò entusiasmo e lasciò ammiratori e discepoli. È, pertanto, una delle figure più interessanti del periodo in cui, nel Regno di Napoli della matematica, aveva il monopolio la confraternita avente per centro Nicola Fergola.

G. A. JOHNSTON — *Berkeley's Logic of Mathematics.* The Monist, Gennaio 1918.

È un notevole complemento alle storie della matematica, fondato sopra uno studio diretto delle fonti.

I. CAJORI — *Newton Solution of numerical Equations by means of Slide Rules.* Colorado College Publication, Enigineering Series, Vol. I, Novembre 1917.

In quattro modi differenti Newton insegnò a risolvere le equazioni numeriche mediante il regolo calcolatorio; le informazioni relative si trovano in opere rare anche nei paesi anglosassoni, ma inaccessibili sul continente; onde tutti dovranno essere grati all'A. di avere estratti i passi concernenti le questioni indicate, corredandoli di opportuni commenti.

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
Serie II. Vol. I. Fasc. III — Luglio-Settembre Anno XX. 1918

G. Pittarelli

Sul significato della parola « Prospettiva » usata nella legge sulla Conservazione dei Monumenti. (1)

Come si legge nei dizionari seguenti:

TOMMASEO — Dizionario della lingua italiana, 1861, Società ed. torinese;

PETROCCHI — Novo dizionario universale della lingua italiana, 1894, Milano, Treves;

Nuovo vocabolario della lingua italiana secondo l'uso di Firenze, 1897, Tip. Galileiana;

FANFANI — Novissimo vocabolario della lingua italiana, Firenze 1899;

RIGUTINI e FANFANI — Vocabolario italiano, Firenze 1903;

tre sono i principalissimi significati delle parola *prospettiva:*

(1) Il Direttore generale delle Antichità e Belle Arti, prof. CORRADO RICCI, in una lettera diretta il 26 febbraio u. s. al Presidente dell'Associazione artistica tra i cultori di Architettura, invitava il Sodalizio ad esprimere un giudizio *completo ed autorevole* sul significato da darsi alla parola *prospettiva,* che si trova negli art. 14 e 23 delle leggi 20 giugno 1909 e 23 giugno 1913 sulla conservazione dei monumenti.

L'Associazione tenne l'invito e nominò una Commissione per studiare la cosa e riferirne.

La Commissione discusse a lungo sull'argomento, aggiungendo motivi ed esempi a quelli che il Ricci con tanto giudizio e senso d'arte pone nella sua lettera a fondamento del proprio parere; e infine incaricò i proff. PITTARELLI e GIOVANNONI di stendere due relazioni, l'una sulla parte, per così dire, generale del soggetto, l'altra sulla parte che più specialmente si riferisce ai monumenti.

Le pagine seguenti contengono la prima, che sola entra nel programma del *Bollettino.*

Digitized by Google

1° arte o scienza di rappresentare per mezzo della proiezione centrale (come diremmo noi) gli oggetti sopra un quadro, piano o curvo;

2° le cose stesse disegnate o dipinte;

3° vedute naturali degli oggetti che si presentano allo sguardo, di un paese e simili.

Il qual terzo significato, con facile modificazione e non infrequente, nasce dal secondo, mutando le loro veci la rappresentazione della cosa e la cosa rappresentata.

Qualche volta i diversi signiticati s'intrecciano, appunto perchè è così facile e rapido il passaggio dall'uno all'altro. Per esempio L. BATTISTA ALBERTI definisce così la pittura: *Sarà dunque la pittura il taglio della piramide visiva secondo un determinato spatio o intervallo, con il suo centro, et con i suoi determinati lumi, rappresentata con linee et colori sopra una propostaci superficie* (1). Qui evidentemente si fanno sinonimi pittura e prospettiva, come risulta anche dalle parole che si leggono alla pag. 304: *pavimento disegnato in pittura o in prospettiva.* A sua volta più tardi, LBONARDO DA VINCI dirà la *prospettiva figliuola membro della pittura* (2); la definirà: *investigazione e invenzione sottilissima degli studi matematici, la quale per forza di linee fa parere remoto quel ch'è vicino e grande quel ch'è piccolo* (3); e più in là la chiamerà *briglia e timone della pittura* (4).

Ancora, circa un secolo e mezzo dopo, la prospettiva, quando già era assurta a scienza e aveva dato alle arti del disegno tutto lo splendore di che rifulsero i secoli XV e XVI, nella mente di GALILEO serviva come mezzo per spiegare alcuni fenomeni spettanti alle macchie solari. A pag. 55 dei « Dialoghi sui massimi sistemi » (5), leggiamo infatti: *L'altra osservazione* (a proposito delle macchie) *a quelli che non son costituiti nell'infimo grado d'ignoranza di prospettiva, dalla mutazione dell'apparente figura e dall'apparente mutazione di velocità di moto si conclude necessariamente che*

---

(1) *Della Pittura,* libro I, pag. 293, 1782, trad. di COSIMO BARTOLI. Il testo latino è: « Erit ergo pictura intersectio pyramidis visivae secundum datum intervallum posito cen« tro, statutisque luminibus in datam superficiem, lineis et coloribus arte repraesentata ». In « Vitruvii de Architettura, Amstelodami apud L. Elzevirum, con i tre libri de « *Pictura* » di L. B. ALBERTI.

(2) *Trattato della pittura,* Roma, MDCCCXC, pag. 10, n. 13, e pag. 29, n. 36.

(3) *Ivi,* pag. 31.

(4) *Ivi,* pag. 167, n. 497.

(5) *Dialoghi* GALILEO GALILEI, *sui massimi sistemi,* Livorno, Vigo 1874, pag. 55.

Digitized by Google

le macchie son contigue al corpo solare, e che toccando la sua superficie, con essa o sovra di essa si muovono, e che in cerchi da quelli remoti in verun modo non si raggirano. Concludonlo il moto, che verso la circonferenza del disco solare apparisce tardissimo, e verso il mezzo più veloce; concludonlo le figure delle macchie, le quali verso la circonferenza appariscono strettissime, in comparazione di quello che si mostrano nella parte di mezzo; e questo perchè nelle parti di mezzo si veggono in maestà e quali elle veramente sono, e verso la circonferenza, mediante lo sfuggimento della superficie globosa si mostrano in iscorcio; e l'una e l'altra diminuzione di figura e di moto, a chi diligentemente l'ha sapute osservare e calcolare, risponde precisamente a quello che apparir deve.

Nella definizione di LEON BATTISTA v'è, col mezzo della rappresentazione, la cosa rappresentata anche con i suoi colori (prospettiva aerea); in quella di LEONARDO sono contemplati gli effetti di quell'*investigazione* e *invenzione* matematica ch'è *briglia e timone della pittura;* e nelle parole di GALILEO la prospettiva vale scienza delle apparenze (1), che si potrebbe dire un quarto significato.

Prendendo un vocabolario qualunque e leggendo le spiegazioni di alcuni vocaboli, troviamo che l'allargamento di significato che ebbe la parola *prospettiva* è comune a moltissime altre. Fermandoci pur alla lettera *A*, vediamo per esempio che *acconciatura* è l'atto e l'effetto dell'acconciare e significa anche gli ornamenti che le donne si pongono intorno ai capelli; che *adorazione* vale sia l'atto di adorare sia la cosa adorata; che *alloggiamento* significa alloggiare e il luogo dove si alloggia; che *amore* si dice anche la cosa e specialmente la persona amata; che *apertura* è l'atto e l'effetto di aprire ed anche il vano per far passare cosa o persona; che, finalmente, l'arte dell'inventare e disporre le forme degli edifizi si chiama *architettura,* ma *architettura* è anche non solo l'opera e il lavoro architettonico ma qualunque altra opera ben composta, o di mano o di ingegno. Non è dunque maraviglia che la parola prospettiva abbia i significati che scaturiscono dagli esempi più su riportati dell'ALBERTI, di LEONARDO e di GALILEO; devesi anche aggiungere che essa ne acquistò altri, specialmente nel parlar comune, pur non riferendosi a soggetti artistici.

Il TOMMASEO condanna, è vero, come modo francese la frase *prospettiva di un tristo avvenire;* ma egli stesso e gli altri vocabolaristi riportano come puramente italiane le frasi seguenti: *gli fece balenare alla mente una*

(1) CREMONA, vol. II, delle *Opere matematiche,* pag. 250.

Digitized by Google

bella prospettiva; ha la prospettiva di un' eredità; ha innanzi a sè una brutta prospettiva, per dinotare quanto si prevede possa avvenire di bene o di male, quanto si presenta alla fantasia ecc. È questo dunque un quinto significato della parola *prospettiva.* E il RIGUTINI, che fu della Crusca, posteriore di poco meno di un trentennio al TOMMASEO, nella sua traduzione del *Lorenzo Benoni* di GIOVANNI RUFFINI (1) l'adopera nei sensi indicati più su. Infatti l'intestazione del primo capitolo è questa: *Prima educazione, prospettive, vessazioni, contrattempi e vicende di viaggio.* Al principio del capitolo XI, pag. 83, si leggono nel secondo alinea le parole seguenti: *In tali piacevoli occupazioni, in buona armonia coi miei compagni, col mio caro Alfredo al fianco, e dinanzi a me la prospettiva di una intera messe di premi e con la certezza di lasciare tra poco il collegio;* mentre nel terzo alinea del capitolo XIV è scritto: *Questa passeggiata ci riuscì più lunga e faticosa che non ci aspettassimo; cosicchè prima di tornare in giù, ci fermammo per riposarci e per godere la prospettiva che ci stava dinanzi.*

Dall'essere la prospettiva *scienza delle apparenze* nasce un sesto significato quello appunto di *apparenza.* Due esempi bastano. Il CECCHI nella Commedia intitolata la *Dote* fa dire a un personaggio: *Non voglio che tu tolga moglie senza dote: i' non ho bisogno in casa mia di fumi nè di prospettive.*

Nella raccolta dei *Canti carnascialeschi* (2) c'è quello dei *capi quadri* ovvero degli *scimuniti* (ved. TOMMASEO). In esso leggonsi i versi seguenti:

Venite, quadri, orsù liberamente
Chè noi come voi siamo;
E chi quadro non è ben sufficiente
Tra noi non lo vogliamo
Ma quei ch'in prospettiva ognor veggiamo
Difformi agli altri, al vestir leggiadri,
Qui gli accettiam fra gli altri per più quadri.

Prospettiva vale qua *apparenza, veduta,* ecc.

L'uso e il significato di un vocabolo non è faccenda che si possa dimostrare come un teorema di geometria, ma dev'essere provata con gli esempi degli scrittori; ecco perchè abbiamo dovuto e dovremo ricercare con qualche industria le fonti nostre italiane, e servirci con qualche larghezza delle citazioni. Brevissimamente diremo dell'origine del vocabolo,

(1) TREVISINI, Milano 1884.

(2) *Canti carnascialeschi,* con prefazione di OLINDO GUERRINI, Milano 1883. pag. 197.

Digitized by Google

ed arrecheremo pochi altri esempi, riportando anche quelli addotti da CORRADO RICCI nella sua lettera, ma illustrandoli con le altre parole dei testi medesimi.

I latini avevano i due verbi *perspicio* (penetrare con l'occhio) e *prospicio* (vedere o mirar lontano o innanzi), ma non i sostantivi *perspectiva* e *prospectiva*. VITRUVIO usa la parola *scenographia*, da σκηνή (*scena*) γράφω (*scrivo*). Egli nel libro I, cap. II, ai n. 5 e 8 della sua *Architectura* dice: *Item scenographia. Est frontis et laterum abscedentium adumbratio, ad circinique centrum omnium linearum responsus.* E traduce lo CHOISY: *De même la Perspective. Est l'equisse de la façade et des côtés fuyants, et la convergence de toutes les lignes vers une pointe de compas* (1).

Perspectivus, come aggettivo, si trova nella latinità bassa (BOEZIO), come si legge nel FORCELLINI (2); il femminile *perspectiva*, a guisa di sostantivo, significava la disciplina matematica riguardante la vista, cioè l'ottica (3).

Dalla *perspectiva* nacquero l'ottica moderna e la prospettiva moderna. E troviamo che il primo che ne abbia scritto, nel decennio 1470-1480, fu il grandissimo pittore, il monarca della pittura di quei tempi, come lo chiamò LUCA PACIOLI, e il maggior geometra: PIERO DEI FRANCESCHI DA BORGO S. SEPOLCRO: il quale pubblicò il suo libro in volgare quasi dialettale, ma dandogli il titolo latino: *De prospectiva pingendi* (4).

Così la chiamarono LEONARDO nel suo *Trattato della Pittura*, GALILEO nel *Saggiatore* e nei *Dialoghi;* il VIGNOLA nelle *Due regole della prospettiva pratica* (5); e così il SERLIO e così tutti sempre in Italia. Qui si adopera la parola *prospettiva* sia come l'insieme delle regole della rappresentazione per mezzo della proiezione centrale, sia come la stessa rappresentazione. Si può vedere in proposito la memoria, già citata in nota, del prof. CREMONA, che fu il grande e venerato maestro dei geometri italiani nella seconda metà dello scorso sec. XIX.

Per noi oggi è comunissima l'espressione *prospettiva di una figura*, e diciamo *figure prospettive* le figure piane che siano sezioni di una stessa piramide visuale, la piramide di L. B. ALBERTI.

I Francesi invece hanno *perspective* in tutti e tre i significati. Così leg-

---

(1) VITRUVE. Texte et traduction, Paris, 1809.

(2) FORCELLINI. *Totius latinitatis Lexicon*. Prato, MDCCCLXVIII.

(3) CREMONA. *Opere matematiche*, vol. II, Milano, pag. 250.

(4) Edizione di Strassbourg, 1899.

(5) Bologna, MDCLXXXII.

Digitized by Google

giamo nei Dizionari dell'ALBERTI e del LITTRÉ: *Peinture qui représente des jardins, des bâtiments ou autres choses semblables, en éloignement, et qui on met au bout d'une galerie ou d'une allée de jardins pour tromper agreablement la vue;* e la parola è presa anche nel significato di aspetto di oggetti visti da lontano.

Gli Inglesi hanno tutte e due le voci: *perspective* e *prospective:* la seconda più propriamente come un aggettivo; la prima non solo nel senso della nostra prospettiva, ma anche per indicare quelle figure che, abbiamo visto, in geometria si dicono *prospettive;* hanno altresì la parola *prospect* per prospettiva, vista, aspettazione e per prospetto (voce, questa nostra, della quale parleremo più in là).

Perspektive hanno i tedeschi.

Dopo ciò veniamo agli altri esempi.

LORENZO IL MAGNIFICO (1) nel *Comento sopra alcuni dei suoi sonetti,* ragionando del diletto che gli uomini sogliono prendere delle cose e delle loro rappresentazioni fatte dai pittori, dice: *Conciossiacchè alcuni si dilettano di cose allegre, come è animali, verzure, balli e feste simili; altri vorrebbono vedere battaglie o terrestri o marittime e simili cose marziali e fere: altri paesi casamenti e scorci e proporzioni di prospettive* (2); *altri qualche altra cosa diversa; e però volendo che una pittura interamente piaccia, bisogna adgiungervi questa parte: che la cosa dipinta ancora per sè stessa diletti.*

Apparisce da questo brano che la parola *prospettiva* è da intendersi nel secondo e nel terzo significato.

ALESSANDRO ALLEGRI nelle *Rime piacevoli* (3) scrive all'amicissimo N. PANDOLFI un'epistola nella quale si difende dell'accusa d'esser *mala lingua,* per aver biasimato il corteggiare moderno (di quell'epoca). Descrive le noie tutte quante del corteggiatore, e dice all'amico che questi intende male le sue parole, sì perchè *novizio,* sì perchè non può aver *retto giudizio* nella speranza *verdeggiante e viva* di far, diremo noi, carriera. Ed aggiunge:

> Send'ella (la speranza) quasi che una prospettiva
> Ch'empie di maraviglie e di stupori
> Nel primo stante, che l'occhio v'arriva.

(1) *Opere,* vol. I, Laterza, Bari, 1913, pag. 68.

(2) Son le parole riportate da CORRADO RICCI.

(3) Verona, MDCV.

Digitized by Google

Anche qui *prospettiva* sta per veduta di cose naturali, atte a destar *maraviglie e stupori.*

Passando dai poeti agli artisti, agli scrittori e ai critici d'arte, cominciamo a spigolare nelle opere di colui che fu tutte le tre cose insieme e che ebbe grandi meriti verso l'arte e la storia dell'arte, del VASARI. Nelle sue *Vite* e nelle sue opere minori troviamo *passim,* e ben si comprende, la parola *prospettiva* adoperata nel primo significato, ma spessissimo anche negli altri (1).

Vol. I, pag. 33. *La seconda specie, che bassi rilievi si chiamano, sono di manco rilievo assai che il mezzo, e si dimostrano almeno per la metà di quelli che noi chiamiamo mezzi rilievi: e in questi si può con ragione fare i piani, i casamenti, le prospettive, le scale, i paesi, come veggiamo nei pergami di bronzo di S. Lorenzo in Firenze e in tutti i bassi rilievi di Donato.* E più giù: *e nei bassi* (rilievi) *la bontà del disegno per le prospettive ed altre invenzioni.*

Vol. I, pag. 39. *Qui fanno i pittori tutte le fatiche dell' arte nel ritrarre dal vivo ignudi... e tirano le prospettive... E se in quelli (fogli) fossero prospettive o casamenti... Perchè chi ha tirate le prospettive nei disegni piccoli... Basta che le prospettive son belle tanto, quant'elle si mostrano giuste alla lor veduta.*

Vol. II, pag. 1273. Nelle descrizioni dell'apparato fatto in Firenze per le nozze di Don FRANCESCO MEDICI con Regina GIOVANNA d'AUSTRIA leggiamo: *pareva per virtù d'una artifiziosa prospettiva, che dipinta vi era, che in un'altra strada simile a quella dei detti Tornabuoni conducesse, in cui con piacevolissimo inganno...;* e più giù: *al medesimo inganno della medesima prospettiva.* Ved. anche a pag. 1275. Ancora si legge a pag. 1291: *nascondendo dietro a se la prospettiva, nella quale prospettiva sfondando molto ingegnosamente....*

Nelle *Notizie dei professori di disegno da Cimabue in qua* di FILIPPO BALDINUCCI (2) si legge: *Erasi recitata in Firenze, per volontà del Serenissimo, una commedia composta da Torquato Tasso, con l'accompagnatura delle macchine e prospettive di Bernando.* Qui siamo nella scenografia. E il BALDINUCCI seguitando dice che il TASSO fu contentissimo e maravigliatissimo dell'opera del BONTALENTI.

---

(1) VASARI, *Passigli,* Firenze, 1832-38.

(2) Ed. fiorentina, MDCCLXX. Tomo VII, nella vita di BERNARDO BONTALENTI (1536-1608).

Digitized by Google

Nell'Architettura universale dello SCAMOZZI (1) si leggono due luoghi, l'uno a pag. 247 rigo 23, nella descrizione del palazzo Strozzi, l'altro (2) a pag. 329 rigo 3, dove parla di portici, gallerie, luoghi di passeggio e simili. Nel primo è detto: *Di rimpetto alla prima entrata è una prospettiva* L *la quale termina là nelle mura dei vicini;* nel secondo: *Vogliamo le loggie essere aerose ed allegre, non impedite da edifizi vicini; e guardino sopra giardini, verdure, acque; e veggano colli e monti piacevoli che lor facciano qualche bella prospettiva.* In questi due passi la parola prospettiva è adoperata nel secondo e nel terzo significato.

Finalmente nei *Castelli* e *ponti* di NICCOLÒ ZABAGLIA (3) a spiegazione della tav. XI, dove sono rappresentati i così detti festaiuoli nei loro vari atteggiamenti per adornare la Basilica di S. Pietro nei giorni festivi, è detto: *sontuoso apparato con drappi, trine ed altre tappezzerie formando architetture, prospettive ed altri ornati, anche a guisa di ben intesi ricami* (4). Qui alla parola prospettiva si deve dare il secondo significato.

Aggiungiamo qualche osservazione sulla parola *prospetto*, della quale si legge anche nella lettera del prof. RICCI.

Il significato di *prospetto* è molto meno largo: esso significa *quanto si presenta dinanzi agli occhi, veduta, facciata: pulcherrimo prospectu* vale di bellissima vista; così il GUICCIARDINI dice: *mentrechè aveva innanzi agli occhi il prospetto di Napoli.* Il significato della parola è tanto suscettibile d'esser ristretto, che essa viene adoperata finanche per indicare lo specchietto contabile di numeri e cifre, illustrate, a volta, da un breve scritto; mentre, lo abbiamo visto, il significato della parola *prospettiva* si allarga sempre più. E le due parole sono ad ogni modo così diverse, che il TOMMASEO non le pone neanche tra i sinonimi.

Potremo aggiungere: il *prospetto* essere una qualità oggettiva che ai nostri sguardi si mostra qual'è veramente, determinata circoscritta non vaga, e risponde alla locuzione *in maestà* di GALILEO già riportata più indietro. Il qual modo di dire dev'essere stato comune allora, almeno tra gli artisti toscani, se lo troviamo adoperato fino due secoli prima da CENNINO CENNINI, nel suo *Trattato della pittura* (5), quando a pag. 7 del cap. IX

(1) Venetia, 1694-1697.
(2) Riportato dal RICCI.
(3) Roma, 1743.
(4) È il terzo e ultimo esempio riportato dal RICCI.
(5) Firenze, Le Monnier, 1859.

Digitized by Google

ei consiglia come si *dee dare la ragione della luce, il chiaroscuro,* in quei luoghi, che hanno la luce obbligata secondo l'*ordine delle finestre* che in essi si trovano. In sì fatti casi l'autore, che pur nel capitolo precedente aveva consigliato al pittore d'aver luce temperata e che *il sole gli batta in sul lato manco,* dà il savio precetto di dare *il rilievo e l'oscuro, seguitando la luce da qual mano si sia;* ed aggiunge: *E se avvenisse che la luce venisse o risplendesse per lo mezzo in faccia, ovvero in maestà, per lo simile metti il tuo rilievo chiaro e scuro alla ragione detta.* Oggi noi diremmo *luce che viene di prospetto.*

Ma lo stesso GALILEO offre un altro passo, nei « Dialoghi », molto istruttivo sull'uso delle parole *in faccia* o *in maestà* in contrapposizione all'altre *in iscorcio,* a pag. 84 e 85 della *Giornata prima.* Egli cerca di dare spiegazione dei fenomeni luminosi che avvengono nella luna, e paragona due striscie che in certe condizioni apparirebbero diversamente illuminate a *chiunque le rimirasse amendue in faccia o vogliam dire in maestà;* ed aggiunge, come contrapposto, quel che avviene quando una delle striscie *sia veduta in iscorcio.*

È bene aggiungere di GALILEO, che egli fu studiosissimo del disegno ed ebbe inclinazione alla pittura e vi fece progressi notevoli, tanto che lo stesso CIGOLI, che fu uno dei maggiori coloristi della Scuola fiorentina, *attribuiva* (come nota il VIVIANI), *in gran parte quanto operava di buono alli ottimi documenti del Galilei, e particolarmente pregiavasi di poter dire che nelle prospettive egli solo gli era stato maestro. Prospettive* qui hanno il secondo significato.

All'*in iscorcio,* dunque, si contrappone l'*in faccia* in quel passo di GALILEO, come nell'arte del disegno si dice: testa veduta di faccia o di prospetto e testa veduta di scorcio; ma allo *scorcio* non si contrapporrebbe mai la *prospettiva,* la quale, chi ben guardi, non è in sostanza che una varietà infinita di scorci. Si aggiunga che parlando di edifizi anche il prospetto loro può dar luogo, anzi dà luogo, a prospettive: basta infatti guardarli o disegnarli in modo che una facciata sia in un piano parallelo al quadro; essa sarà vista o disegnata di prospetto, ma le altre facciate saranno subito viste e disegnate in iscorcio, e in iscorcio saranno anche le membrature sporgenti o rientranti della prima facciata. E di simili effetti devesi tener grandissimo conto in architettura; sicchè molto giustamente il SELVATICO dice e consiglia (1): *converrebbe che della prospettiva s'insigno-*

(1) P. SELVATICO, *Scritti d'arte,* Firenze, Barbera, 1859, pag. 324.

Digitized by Google

rissero (gli architetti) *in modo non già da apprendere le sole regole elementari, ch'è cosa di giorni per chi conosce la geometria descrittiva, ma da convertire in scene prospettiche gli edifici pensati dalla mente loro, allietando simili rappresentazioni colla magia del colore.*

Tacciamo poi il significato noto che ha la parola *prospetto* nel capo II, sez. I, § IV del Codice civile intitolato appunto « Della luce e del prospetto », dove agli articoli 587, 589 e 590 si parla di *finestre a prospetto*, vedute dirette verso il fondo vicino, e agli articoli 588 e 589 di *vedute laterali ed oblique.*

Per contrario la prospettiva è quale ce la facciamo noi, e varia d'aspetto in infinite maniere, scegliendo punti di vista e distanze e quadri in un modo e nell'altro, ma a nostro agio e piacere, ed anche per riuscire a certi effetti o a certi altri, e per conseguire certi fini o certi altri. *Coloro che disegnano i paesi si pongono bassi nel piano a considerare la natura dei monti e dei luoghi alti, e per considerare quella dei bassi si pongono alti sopra i monti:* così dice N. MACHIAVELLI nella sua dedica del « Principe ». Nè paia strano di citarlo qui a proposito di quistioni d'arte: egli per introdurre il suo discorso sul grave argomento non seppe di meglio che prendere una similitudine da ciò che fanno i pittori; noi, che parliamo d'arte, citiamo la sua similitudine espressa con tanta vigorosa evidenza.

La prospettiva, dunque, consiste, specialmente per ciò che riguarda il terzo significato, in quel mutar continuo e voluto degli aspetti delle cose e delle loro apparenze, anche di quelle che inducono in errore i nostri occhi, come la principalissima fra tutte, quella delle rette parallele che paiono concorrere in un punto. Uno è l'oggetto, ma le prospettive, i sembianti suoi possono essere infiniti. E poichè tutto il nostro discorso s'impernia sugli esempi degli scrittori nostri, ci reca grandissimo diletto sapere che l'ultimo concetto è scolpito da DANTE (il Poeta divino non poteva certo mancare in nostro aiuto) in due delle ultime terzine del canto finale del Paradiso. Egli si trova in faccia al mistero della Trinità: non varietà di aspetti in Dio, ma varietà del punto di vista del poeta.

Non perchè più che un semplice sembiante
Fosse nel vivo lume ch'io mirava,
Ch'è tal è sempre qual'era davante;
Ma per la vista che s'avvalorava
In me, guardando, una sola parvenza,
Mutandomi io, a me si travagliava.

Avemmo occasione di citare un passo del VASARI nel quale si parla di

Digitized by Google

piacevolissimo inganno d'una certa prospettiva. Ebbene non risiede appunto in questo *piacevolissimo inganno* l'attrattiva maggiore della natura e dell'arte, non esclusa l'architettura?

Ecco quello che il LEOPARDI sentiva leggendo l'ARIOSTO:

> o torri, o celle
> o donne, o cavalieri,
> o giardini, o palagi, a voi pensando
> in mille vane amenità si perde
> la mente mia (1).

Ebbene in questo errore felice seminato da un grandissimo poeta nella fantasia di un altro poeta grandissimo, entrano per un terzo le donne e i cavalieri, e per due terzi le torri, le celle, i giardini, i palagi, tutti soggetti architettonici: e v'entrano certo con e per i loro aspetti, con e per le loro prospettive.

Ma non c'è prospettiva più deliziosa, più piacevolmente ingannatrice, e nello stesso tempo meglio colta dal vero e delineata di quella che il LEOPARDI stesso dipinge nella canzone posteriore « Il tramonto della luna ».

> Quale in notte solinga,
> Sovra campagne inargentate ed acque,
> Là 've zefiro aleggia,
> E mille vaghi aspetti
> E ingannevoli obbietti
> Fingon l'ombre lontane
> Infra l'onde tranquille
> E rami e siepi e collinette e ville.

Quel *vaghi aspetti* richiama due passi, l'uno del BALDINUCCI nella vita di L. BERNINI, pag. 72 del volume 14 delle Notizie ecc., l'altro di EUSTACHIO ZANOTTI, che fu ornamento dello Studio Bolognose (secolo XVIII), nel suo *Trattato teorico-pratico di prospettiva.* Dice il BALDINUCCI parlando della *Scala Regia* nel palazzo Vaticano:... *avendo con vaghissima prospettiva di scalinate, di colonne, di architravi, cornici e volte, resa all'occhio più vaga la larghezza del suo principio con la strettezza del suo fine.* E lo ZANOTTI: *Per esempio, un portico che sia costrutto d'un gran numero d'archi, per quel piacere che si ha in vedere una lunga serie di pilastri o di colonne che fanno un vago aspetto di prospettiva* (pag. 204 dell'ediz. milanese del MDCCCXXV).

---

(1) Canzone ad Angelo Mai.

Digitized by Google

Il *piacevolissimo inganno* del VASARI e le *mille vane amenità* e gl'*ingannevoli obbietti* del LEOPARDI; i *mille vaghi aspetti* di questo e il *vago aspetto* dello ZANOTTI e la *vaghissima prospettiva* del BALDNIUCCI, ci dicono senz'altro qual sia la larghezza del significato della parola *prospettiva,* a differenza dell'altra *prospetto,* e quanto lume d'immaginativa in essa si raccolga.

***

Riassumendo, a noi pare, da tutti gli esempi riportati, che il significato che meglio si adatta alla parola *prospettiva* dell'art. 14 della legge, sia il terzo, inteso nel senso più largo possibile: cioè a dire di veduta non solo del monumento in sè, ma di tutta la scena circostante, così di altri edifizi come di giardini, colli, boschi ecc.; i quali, facendogli corona, costituiscono quell'insieme armonico e vago di figurazioni, le quali o si suscitarono nella fantasia dell'artista all'atto della concezione del monumento, o altri artisti, venuti dopo di lui, riuscirono a far nascere intorno a quello.

Ma mentre su questo argomento è per prendere la parola l'altro relatore, noi intanto ringraziamo il prof. CORRADO RICCI che con la sua lettera promosse lo studio della questione, e l'Associazione che volle affidarcene l'incarico, lietissimi se ella darà il proprio assenso al nostro modo di vedere in un argomento, che tanto interessa l'arte nostra e i monumenti degli *avi nostri.*

Storia

G. LORIA. *Guida allo Studio della Storia delle Matematiche.* — Volume di pag. XVI-228, elegantemente legato L. 3. — Ulrico Hoepli, editore, Milano, 1916.

« La celebre Collezione dei Manuali Hoepli si è testè accresciuta di un nuovo elemento di grande importanza, perchè è rappresentato da un'opera che non ha somigliante in alcuna letteratura. Parliamo della *Guida allo Studio della Storia delle Matematiche*: ne è autore il Prof. GINO LORIA della Università di Genova, ben noto a tutti per i suoi importanti lavori scientifici e storici, i quali lo disegnavano meglio di qualunque altro per comporre un manuale destinato a coloro che intendono dedicarsi ad un ramo di studii che va di giorno in giorno acquistando maggior favore fra le classi dirigenti.

Digitized by Google

Il nuovo volume del Prof. LORIA è diviso in due parti; la prima (intitolata *Preparazione alle ricerche sulla Storia delle Matematiche)* fa conoscere alcune generalità sul metodo storico e poi le principali pubblicazioni sulla storia delle matematiche: con ciò lo studioso è posto in grado di conoscere lo stato attuale di questa disciplina. La seconda parte (che porta il titolo *Ausiliari nelle ricerche sulla Storia delle Matematiche)* descrive ed analizza tutti i mezzi che si trovano oggi a disposizione di coloro che intendono di compiere qualche ricerca originale sopra questa branca dello scibile. Naturalmente nella nuova *Guida* abbondano le indicazioni bibliografiche; esse son date con la più scrupolosa esattezza in base ad uno studio di quanto offrono le letterature greca, latina, italiana, francese, tedesca ed inglese. Nè va taciuto che, quantunque l'autore abbia rivolta di preferenza la propria attenzione alle matematiche, pure la maggior parte di quanto egli insegna potrà venire studiato con sommo giovamento anche da coloro che intendono consacrarsi ad investigazioni relative alla storia della fisica, della chimica, della medicina o delle scienze naturati in generale. »

Così scrive la *Nuova Antologia;* per conto nostro aggiungiamo l'indice dei Capitoli costituenti l'opera in discorso:

PARTE I. Preparazione alle ricerche sulla Storia delle Matematiche. § I. Generalità. Il metodo storico. § II. Rassegna delle principali opere sulla storia della matematica. § III. La storia della matematica nella letteratura periodica.

PARTE II. Ausiliari nelle ricerche sulla Storia delle Matematiche. § I. Generalità. § II. I manoscritti. § III. Biografia e bibliografia relative alle matematiche dei Greci e dei Romani. § IV. Cenni sulla bibliografia relativa alle matematiche degli antichi popoli extra-europei. § V. La biografia e le collezioni biografiche. § VI. Altre fonti biografiche. § VII. Le opere complete ed i Carteggi scientifici. § VIII. La bibliografia ed i cataloghi bibliografici. § IX. Recensioni critiche di scritti matematici. § X. Come utilizzare gli ausiliari precedentemente descritti. Indice alfabetico dei nomi citati.

A. MACFARLANE. *Lectures on ten British Mathematicians of the Nineteenth Century.* New-York, J. Wiley & Sons, 1916, p. 148, 48^0 gr.

L'A. è favorevolmente noto nel mondo matematico per lavori di analisi vettoriale e per essere stato l'anima dell'« International Association for promoting the study of Quaternions and allied Systems », della quale era presidente quando la morte lo colse addì 28 Agosto 1913. Il volume che annunciamo fu pubblicato per merito di amici devoti dell'estinto, onde a

Digitized by Google

lui non debbono imputarsi gli errori di stampa troppo frequenti, a cui non sono abituati i lettori di opere anglosassoni. I matematici di cui sono tracciate a grandi linee le biografie sono: G. PEACOCK (1791-1858), A. DE MORGAN (1806-1871), W. R. HAMILTON (1805-1865), G. BOOLE (1815-1864), A. CAYLEY (1821-1895), W. K. CLIFFORD (1845-1879), J. H. S. SMITH (1826-1883), J. J. SYLVESTER (1814-1897), T. P. KIRKMANN (1806-1895) e I. TODHUNTER (1820-1884), uomini di varia fama, ma tutti ben noti a chiunque siasi occupato di matematica. Per ciascuno l'A. non espone una completa biografia, nè un quadro completo della produzione scientifica, opponendosi a ciò i limiti che la discrezione impone ad un conferenziere; probabilmente se egli stesso avesse curata la stampa del suo lavoro avrebbe aggiunto, forse sotto forma di semplici note, ulteriori particolari, sia pure soltanto di natura bibliografica, dei quali il bisogno si fa vivamente sentire da coloro che aspirerebbero di conoscere appieno i grandi personaggi di cui il MACFARLANE delinea i profili. Alcuni, e gustosissimi, di tali particolari si trovano in una recensione interessantissima dell'opera di cui ragioniamo, che fu pubblicata nel fascicolo di Ottobre 1917 di *The mathematical Gazette* ed alla quale rinviamo i nostri lettori.

G. L.

G. A. MILLER. *Historical Introduction to Mathematical Literature*, 3°, pagine XIII-302, New-York, The Macmillan Company, 1916 (Prezzo doll. 1,60).

Esistono molte notizie storico-bibliografiche estremamente utili per tutti coloro che si dedicano agli studi matematici e che tuttavia non si possono ricavare da alcuna opera da porsi nelle mani degli studenti; tale osservazione consigliò l'A. ad esporle in alcune conferenze tenute agli studenti dell'Università dell'Illinois e poi a raccoglierle nel volume che abbiamo sott'occhio. Tale volume, un po' per la materia sua ed un po' per essere il riflesso di conferenze staccate, non possiede (e forse non poteva possedere) vera organicità. Perciò, volendo dare ai nostri lettori un'idea, possibilmente adeguata, di quanto contiene, è giocoforza fare una rapida rassegna dei sette Capitoli che lo formano.

Il I (sotto il titolo » Osservazioni generali ») dà notizie intorno al sorgere ed allo svilupparsi della storia della matematica, espone le ragioni della sua utilità e si chiude con alcune notizie sopra la matematica americana.

Alla « Letteratura matematica in generale » è dedicato il II Capitolo; il quale porge particolareggiate notizie intorno ai vari tipi di pubblicazioni

Digitized by Google

periodiche esistenti, intorno alle bibliografie, enciclopedie ed altre opere di consultazione, finalmente intorno alle tavole numeriche ed alle opere complete dei più eminenti matematici.

Nel III Cap. (« Questioni storiche generali concernenti le matematiche ») l'A. s'intrattiene sopra le definizioni proposte per il vocabolo « matematica «, sopra le divisioni e suddivisioni di tale scienza e sui concetti predominanti in tale scienza; seguono osservazioni intorno alle notazioni ed alla terminologia in uso, sugli errori che s'incontrano nella letteratura matematica e sulla matematica dal punto di vista didattico.

I tre Capitoli seguenti hanno un piano comune e ben definito, giacchè hanno lo scopo d'insegnare quali siano i temi principali che furono sinora svolti dai cultori dell'Aritmetica, della Geometria e dell'Algebra; naturalmente, data l'esiguità dello spazio, l'A. dovette restringersi a cenni rapidissimi, nè sentiamo di farci mallevadori che siano completi.

Nel Cap. VII si trovano raccolte brevi biografie di 25 eminenti matematici defunti; sono: EUCLIDE, ARCHIMEDE, APOLLONIO, DIOFANTO, VIETA, DESCARTES, FERMAT, NEWTON, LEIBNIZ, EULERO, LAGRANGE, GAUSS, CAUCHY, STEINER, ABEL, HAMILTON, GALOIS, SILVESTER, WEIERSTRASS, CAYLEY, HERMITE, KRONEEKER, CREMONA, Lie e POINCARÉ. Estremamente arduo dev'essere stato il lavoro di scelta di questi nomi, e l'A. certamente non avrà nutrito la speranza che il risultato fosse per ottenere approvazione completa e generale; così certamente molti lamenteranno di non trovare nel riferito elenco i nomi di Leonardo Pisano, da cui comincia l'algebra, di Galileo, da cui traggono origine le teorie dei moti e delle forze, e di Monge, vero e proprio iniziatore della moderna geometria.

Tale generale consenso mancherà certamente all'A. anche da parte di chi legge l'*Appendice* in cui egli ha presentato un elenco di opere importanti di indole generale, cioè biografie e bibliografie, storie, scritti didattici e filosofici; chè tali opere appartengono quasi esclusivamente alla letteratura anglo-sassone, con due eccezioni in favore di un'opera del Picard e dell'*Enciclopedia delle matematiche elementari*, progettata dall'associazione « Mathesis », che auguriamo veda la luce in un non lontano avvenire, ma a cui oggi non è dato ricorrere per aiuto. Se in una ventura edizione l'A. vorrà consacrare cure speciali a rivedere e completare quest'*Appendice*, accrescerà di molto l'utilità (del resto considerevole) della sua interessante pubblicazione.

G. L.

Digitized by Google

F. CAJORI. *William Oughtred, a great seventeenth-century Teacher of Mathematics.* Chicago ad London. The Open Court publishing comp. 1916, 8° picc., p. VI+100.

Il nome dell'OUGHTRED è poco conosciuto in Italia; generalizzando quanto accadde a me stesso potrei dire che quel po' di notorietà di cui gode dipende dal trovarsi, nell'*Appendice agli Elementi di Algebra di I. Todhunter* pubblicata a Napoli nel 1879, sotto il nome di « regola di OUGHTRED », una procedura pratica per *trovare il prodotto di due numeri approssimati.*

Eppure egli occupa un posto così eminente nella storia della matematica inglese prima di NEWTON, egli esercitò un'influenza tanto benefica sull'istruzione matematica dei suoi conterranei, che ben meritato appare l'omaggio che il CAJORI ha a lui tributato con lo scrivere ed il pubblicare il volumetto che oggi additiamo all'attenzione degli studiosi.

WILLIAM OUGHTRED nacque a Eton (la piccola città nei pressi di Londra, celebre per il collegio donde uscirono tante eminenti personalilà inglesi) fra il 1573 ed il 1575; il 1° Settembre 1592 entrò nel King College di Cambridge, ove divenne successivamente B. A. (1596) e M. A. (1600) ed ove rimase in qualità di Fellow sino al 1600. Nel 1604 ottenne il posto di vicario a Shalford (Surrey), nel 1606 prese moglie, nel 1610 fu fatto rettore di Albury, ove menò tranquilla esistenza sino al 30 Giugno 1660, giorno della sua morte.

Un'invincibile repugnanza per la stampa ebbe per risultato che molti dei risultati a cui pervenne ottennero con grande ritardo la diffusione di cui avevano diritto; così il metodo per la delineazione delle meridiane fu da lui inventato all'età di 23 anni, ma vide la luce soltanto nel 1647, quando fu dato alle stampe la *Clavis mathematicae,* la più celebre delle sue opere; così l'invenzione del regolo calcolatorio soltanto di recente (ed appunto per merito del CAJORI) fu riconosciuta per una delle sue più originali benemerenze, nè va taciuto che parecchi suoi scritti videro la luce, dopo la sua morte, appunto col titolo: *Opuscola mathematica hactenus inedita* (Oxford, 1677).

Quantunque l'OUGHTRED non abbia occupato alcuna posizione nel pubblico insegnamento, pure esercitò tanto influsso sopra la gioventù studiosa del tempo suo, da meritare l'epiteto di *Todhunter del suo secolo.* Egli ebbe la chiara visione della straordinaria influenza che i simboli avrebbero esercitato sopra lo sviluppo dell'Algebra, epperò ne propose di nuovi, che vennero largamente accettati dai contemporanei e che, almeno in parte, sono tuttora in uso; il CAJORI con pazienza e dottrina da monaco benedettino ha rac-

Digitized by Google

colti un'infinità di documenti atti a porre in luce questa faccia dell'attività del suo eroe, assurgendo così dall'ufficio di biografo a quello ancora più elevato ed importante di storico della scienza. Nè solo in tale occasione egli si elevò a tanta altezza: chè nel proporsi di determinare le relazioni intellettuali intercedute fra l'OUGHTRED e DESCARTES e nell'esporre le idee didattiche del primo egli diede prova di quella visione panoramica che caratterizza chi è chiamato a comprendere l'evoluzione delle idee governatrici del mondo. Ciò basta a provare come il lavoro qui brevemente analizzato debba prendere posto nella biblioteca di qualunque storico della matematica.

G. L.

Opere complete ed Enciclopedie.

F. GOMES TEIXEIRA, *Obras sobre mathematica publicados par ordem do Governo portugues.* Vol. VII, Coimbra 1915. 4° p. 424.

Questo nuovo elemento di una raccolta che i nostri lettori conoscono (v. questo *Bollettino,* Anno VIII, 1905. p. 25) contiene estesi ed importanti complementi al *Traité des courbes speciales remarquables,* tratti da articoli pubblicati dall'A. in varie riviste. Tali scritti appaiono ivi tradotti in francese e distribuiti in cinque Capitoli intitolati come segue:

I. Sopra alcune curve algebriche.
II. Sopra alcune curve trascendenti.
III. Sopra alcune classi di curve.
IV. Sopra alcune questioni di geometria generale.
V. Sopra alcune curve gobbe.

Un'Appendice — che era già stata pubblicata prima col titolo: *Sur les problèmes célèbres de la géométrie élémentaire non résolubles avec la règle et le compas* — si collega naturalmente alle ricerche sopra le curve speciali per ragioni che è facile comprendere. Infatti tutti gli artifici che vennero proposti per risolvere i problemi della duplicazione del cubo, della trisezione dell'angolo e della quadratura del cerchio riposano sull'uso di curve piane speciali, spesso immaginate a quello scopo; onde è ben naturale che l'illustre autore, dagli studi che va da lunghi anni facendo sulle linee particolari, sia stato condotto a occuparsi di quei celebri problemi e siasi proposto di far conoscere i procedimenti che per risolverli vennero suggeriti, a partire dall'Antichità più remota, sino ai nostri giorni.

Digitized by Google

Così ebbe origine l'*Appendice* in discorso, la quale naturalmente si è divisa in tre parti:

I. Problema delle medie proporzionali; duplicazione del cubo.

II. Divisione dell'angolo in parti eguali; altri problemi cubici.

III. Quadratura del cerchio.

L'autore conosce perfettamente la letteratura dell'argomento; egli espone con metodo uniforme (fondato sull'uso di coordinate cartesiane o polari) quanto ivi si trova, non senza aggiungere qua e là osservazioni e sviluppi suoi propri; nè va taciuto che in questo nuovo Volume dell'eminente matematico portoghese si ritrovano le doti di rigore e chiarezza ben note a tutti coloro che ne conoscono le altre opere.

G. L.

Euclidis Opera omnia, ediderunt I. L. HEIBERG *et* MENGE. Vol. VIII: *Phaenomena et scripta musica ed.* H. MENGE; *Fragmenta collegit et disposuit* I. L. HEIBERG. Lipsiae, Teubner 1916, 8° p. LIV+292.

Il volume che annunziamo completa la notissima edizione di EUCLIDE facente parte della *Bibtiotheca script. Graec. et Roman. Teubnerianae*, edizione cominciata nel 1883 e proseguita ad intervalli variabili, per merito di due infaticabili e dottissimi ellenisti.

La parte principale di esso è costituita dai *Fenomeni*, testo greco e traduzione latina, con varianti alle dimostrazioni e scoli sin qui inediti: ad essi segue lo scritto sulla *Musica*, al pari del precedente edito del MENGE.

Le ultime sessanta pagine, furono fatica particolare dell'HEIBERG e comprendono frammenti sin qui dispersi delle opere del grande Alessandrino che oggi si considerano come perdute: Libro della *Divisione delle figure*, *Sofismi*, *Porismi*, *Luoghi superficiali* e *Coniche*. Il volume si chiude con il noto epigramma che l'*Antologia greca* attribuisce ad EUCLIDE e con alcuni scoli tratti da mss. vaticani.

È appena necessario avvertire che il metodo seguito in questo, come nei precedenti volumi dell'edizione di cui parliamo, è informato ai criteri rigorosi ed esatti che governano oggi tutta la classica filologia; onde i testi che vengono presentati hanno tutti i caratteri di quelli che si riguardano come definitivi.

G. L.

Digitized by Google

Algebra

A. LOEWY. *Lehrbuch der Algebra. Erster Teil. Grundlagen der Arithmetik.* Leipzig, Veit & Comp., 1915; 8° p. VI+398.

È la prima parte di un'opera, che ha essenzialmente scopo didattico, e che a tale scopo bene risponde per l'esposizione corretta, chiara ed ordinata.

L'autore fonda la teoria dei numeri interi sui noti postulati di PEANO (C. 1), definisce le operazioni di addizione e moltiplicazione, e stabilisce i concetti generali di « gruppo » e di « corpo ». Introduce poi i numeri razionali come coppie di numeri interi, definendo opportunamente l'eguaglianza di due coppie e le operazioni sulle coppie; e mostra che i numeri razionali, i quali comprendono i numeri interi, formano un corpo, e possono disporsi in serie ordinata.

Due successioni numerabili corrispondenti di numeri razionali (« zusammengehörige Definitionsfolgen ») definiscono un numero reale (C. 2); anche i numeri reali costituiscono un corpo e sono ordinabili. Ai numeri reali si giunge pure mediante le frazioni decimali illimitate o mediante le frazioni continue; l'autore si trattiene sulla risoluzione delle equazioni indeterminate di primo grado mediante le frazioni continue, e sulle frazioni continue periodiche.

Alla teoria « genetica » dei numeri reali, svolta nei primi due capitoli, si contrappone la teoria « astratta », che forma l'oggetto del C. 3. Qui si parte da un corpo generico di elementi, cioè da un insieme di elementi qualunque che, componendosi mediante due certe operazioni, dànno luogo ancora ad elementi dell'insieme; si possono stabilire per il corpo considerato postulati tali, da renderlo isomorfo, cioè sostanzialmente identico, al corpo dei numeri reali. Il postulato di DEDEKIND conduce poi alla rappresentazione dei numeri reali mediante i punti d'una retta.

Il C. 4 tratta delle potenze e dei logaritmi. L'autore fa uso costantemente delle coppie di successioni corrispondenti, i cui elementi possono però essere razionali o irrazionali.

Il C. 5 è dedicato alla teoria dei limiti. Vi si definisce il limite superiore ed inferiore d'un insieme, il concetto di sezione secondo DEDEKIND, il punto limite, l'insieme derivato, e così via. Segue la teoria delle successioni, dei limiti, delle serie; il calcolo combinatorio e la sua applicazione allo sviluppo delle potenze intere e positive d'un binomio; lo studio dalla serie esponenziale, binomiale, logaritmica; la teoria dei prodotti infiniti.

G. VIVANTI.

Digitized by Google

Forme Algebriche.

E. B. ELLIOT. *An Introduction to the Algebra of Quantics.* II edition. Oxford, Clarendon Press, 1913, 8° p. XVI-416 (Prezzo del vol. leg. scellini 15).

La teoria delle forme algebriche, che vantò tanti e così valenti cultori nel periodo 1840-1890, è da qualche anno abbandonata; dopo che furono stabiliti i sistemi invariantivi delle forme dei primi gradi isolate e di alcuni gruppi da esse formati e dopo che, d'altro lato, l'HILBERT dimostrò esser finito il numero delle formazioni invariantive linearmente indipendenti di un sistema qualunque di forme con un numero qualunque di variabili, la teoria generale parve avere raggiunto il proprio fastigio ed i problemi speciali tuttora intatti erano talmente complicati che, da un lato, spaventarono i più intrepidi calcolatori e d'altronde rendevano titubanti ad applicare i risultati ottenuti a nuove indagini. Ciò non ostante la letteratura matematica di quest'ultimo quarto di secolo non è totalmente deserta di lavori concernenti le forme algebriche e per aumentarne i cultori pensò saggiamente l'A. dell'opera che oggi annunziamo di esporre metodicamente quanto ne costituisce la parte essenziale. Il fatto che, in meno di un ventennio, ne fu necessaria una nuova edizione fa fede della buona accoglienza che il suo lavoro ricevette.

La trattazione della teoria delle forme che troviamo in quest'opera è essenzialmente « inglese »; lo è per lo stile, che ricorda quello del SALMON; lo è per la simbolica usata, la quale non presenta alcun punto di contatto con quella di ARONHOLD e CLEBSCH; lo è infine per la ricchissima collezione di esercizi, assai ben scelti ed assai istruttivi. La parte principale, come è ben naturale, si riferisce alle forme binarie, ma non mancano cenni sopra quelle con un numero di variabili superiore a due. Ed infatti, dopo alcune generalità (Cap. I), l'A. stabilisce le proprietà caratteristiche degli invarianti (Cap. II) e dei covarianti (Cap. III) e la distinzione essenziale fra variabili cogredienti e variabili contragredienti (Cap. IV). A questo punto suppone che le forme considerate siano binarie; trova l'espressione degli invarianti come funzioni di differenze (Cad. V), stabilisce il concetto di semi-invariante (Cap. VI) e quindi la teoria delle note operazioni Ω e O (Cap. VII). Il Cap. VIII è dedicato alle funzioni generatrici ed il seguente alla dimostrazione data da HILBERT per la finitezza del sistema delle forme invariantive. Sorvolando sopra le svariate ricerche contenute nei Cap. X e XI, faremo cenno del seguente, ove con la teoria delle forme

Digitized by Google

canoniche, si chiude ta teoria generale delle forme binarie; chè i due seguenti sono consacrati a forme di gradi speciali, non superiori a 6. Il penultimo Cap. fa conoscere alcune interpretazioni geometriche della teoria delle forme binarie, mentre l'ultimo concerne le forme ternarie, con speciale riguardo a quelle quadratiche e cubiche.

Quanto procede è sufficiente a raccomandare l'opera del sig. Elliot all'attenzione della gioventù studiosa. G. L.

Analisi.

F. RIESZ. *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* Paris, Gauthier-Villars, 1913; 8° p. VI-182.

È un'esposizione, storica e sistematica ad un tempo, di questa teoria, la cui importanza nell'Analisi si va ogni dì più affermando.

L'Autore prende le mosse (C. 1) dal metodo dei coefficienti indeterminati; esamina e discute l'applicazione che ne fa FOURIER all'integrazione dell'equazione di LAPLACE, passa poi a matematici posteriori e meno noti, FÜRSTENAU e KÖTTERIAZSCH, per venire infine ai contemporanei, APPELL e POINCARÉ. Il C. 2 tratta dei determinanti infiniti e della loro applicazione alla risoluzione dei sistemi d'infinite equazioni lineari. Nel C. 3 tali sistemi sono studiati direttamente, sotto la condizione che le soluzioni debbano rendere convergente assolutamente la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p$, dove $p>1$; il caso particolare $p=2$ è quello considerato da SCHMIDT. Con queste ricerche sono strettamente connesse quelle che formano l'oggetto dei due Capitoli successivi, 4 e 5, concernenti le sostituzioni lineari e le forme quadratiche ad infinite variabili. Infine un ultimo Capitolo (C. 6) accenna brevemente alle applicazioni della teoria alle equazioni differenziali lineari, alle equazioni integrali ed alle serie trigonometriche.

G. VIVANTI.

Nuovi esercizi di Analisi infinitesimale tratti dalle Matematiche applicate del Prof. GIULIO VIVANTI. Pavia; Mattei e C. editori, 1916; 8° gr. p. VII—520 (Prezzo L. 20).

Ecco un libro originalmente concepito, che costituisce un lavoro di tipo assolutamente nuovo: una raccolta di esercizi di calcolo scelti nei rami più svariati delle applicazioni alla meccanica, alla fisica, alla chimico-fisica ecc. Lo studio di tali esercizi permetterà al giovane studioso di capire

Digitized by Google

bene e con la maggior facilità quanta sia la potenza di quegli strumenti analitici, che gli ha insegnato il calcolo infinitesimale, e gli darà la chiara visione del perchè e del come il metodo matematico si presti allo studio dei problemi più varii.

Questo libro sarà una delle fonti cospicue, a cui verisimilmente attingeranno i futuri libri di esercizi, e servirà di modello ad altri trattati consimili per altre branche della matematica. In esso è superata da maestro la difficoltà capitale di raccogliere esercizi, che siano veri e propri esercizi di calcolo, che si possano proporre a un allievo del primo biennio della facoltà di matematica, e che, pure ampliandone la cultura scientifica, non costringano per ogni esercizio o per ogni gruppo di esercizi a una lunga serie di premesse, e di nozioni tolte ad altre scienze. Perchè in tal caso il libro mancherebbe al suo scopo; invece di essere un libro di esercizi di calcolo, esso sarebbe uno zibaldone informe di definizioni e di teoremi appartenenti alle scienze più disparate, e servirebbe soltanto a dare allo studioso nozioni informi e imprecise col pretesto che in qualche sviluppo ad esse relativo si presenta qualche derivata o qualche integrale.

Fare una recensione del contenuto di questo libro è all'incirca impossibile: esso è diviso in 11 capitoli, in ciascuno dei quali sono raccolti gli esercizi che si riferiscono a un determinato ramo delle matematiche applicate. E dall'indice ne ricopio qui l'elenco:

P. 1. Cinematica; P. 2. Statica; P. 3. Teoria del potenziale; P. 4. Dinamica; P. 5. Idrodinamica e idraulica; P. 6. Fisica; P. 7. Chimica fisica e termodinamica; P. 8; Tecnica; P. 9. Astronomia e geodesia; P. 10. Calcolo delle probabilità, economia politica e statistica; P. 11. Questioni varie.

In molti esercizi si giunge fino al calcolo numerico; in altri, in cui si incontrano curve più o meno complicate, si studia l'andamento qualitativo di queste, in modo che il lettore abbia ben chiaro l'andamento del fenomeno studiato, e non si accontenti di aver scritto una formola, di cui non ha penetrato il significato fisico. Un' appendice finale spiega tutti i termini tecnici usati nell'opera.

L'importanza della massima parte degli esercizi scelti, la trattazione completa e accurata rendono questo libro prezioso per gli allievi delle nostre università e dei nostri politecnici: essi, nello studiare tali esercizi, oltre ad aver avuto largo campo di apprendere gli artifici del calcolo, avranno imparato una quantità di nozioni fondamentali per le scienze applicate, avranno capito quanto sia stolta la derisione di tanti pratici per le formole e per il metodo matematico.

G. FUBINI.

Digitized by Google

C. DE LA VALLÉE POUSSIN. *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.* Paris, Gauthier-Villars, 1916: 8° p. VIII 154.

Questo volume, che fa parte della Collezione Borel, contiene la materia d'un corso di lezioni tenuto dall'autore, già professore nell'Università di Lovanio, al Collegio di Francia nell'inverno 1915-16. Esso è diviso in tre parti, corrispondentemente ai tre incisi di cui consta il titolo.

Nella P. I, premesse le definizioni e le proposizioni fondamentali della teoria degli aggregati, l'autore stabilisce i concetti di *complementare*, *funzione caratteristica* e *limite* d'un aggregato, definisce gli aggregati *aperti* e *chiusi* (*) e ne determina la struttura; dimostra il teorema di Borel. Segue la teoria della misurabilità degli aggregati e delle funzioni, e la classificazione delle funzioni secondo Baire; il risultato fondamentale a cui si giunge è che l'insieme delle funzioni misurabili (*B*)—secondo la denominazione introdotta da Lebesgue—coincide coll'insieme delle funzioni comprese nella classificazione di Baire. Infine l'autore tratta dell'integrale di Lebesgue e dei suoi rapporti coll'integrale di Riemann.

Nella P, II compare il concetto di *funzione additiva di aggregato*; con questo nome si designa una funzione che prende un valore determinato su ciascun aggregato di un certo campo, e il cui valore sopra un aggregato somma di un numero finito od infinito di aggregati è la somma dei valori che essa prende su questi. Alle nuove funzioni si estendono le definizioni di *continuità*, *continuità assoluta*, *variazione*, *derivata*; le funzioni assolutamente continue coincidono cogli integrali indefiniti di Lebesgue.

Nella P. III l'autore sviluppa il *teorema* e il *problema di Baire*: condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione sia di classe 1; costruzione di una successione di funzioni continue avente per limite una data funzione di classe 1. I risultati ottenuti vengono poi estesi alle funzioni di classe α, dove α è un numero qualunque finito o trasfinito; e l'opera si chiude colla dimostrazione dell'esistenza di funzioni di classe qualunque.

Avremmo voluto dare un più largo cenno del contenuto del presente volume, seguendo passo passo l'autore nei suoi sviluppi; ma questo ci avrebbe costretti ad esporre tutta la ricca e svariata terminologia da esso introdotta, portandoci così fuori dei limiti di una recensione, il cui ufficio non è di sostituire la lettura del libro, ma di additare il libro all'atten-

(*) Importa notare che questi due termini non sono contrapposti; un insieme è *chiuso* se contiene tutti i punti limiti comuni ad esso e al suo complemcntare, *aperto* se non contiene alcuno di tali punti.

Digitized by Google

zione degli studiosi. Noi siamo certi del resto che in Italia, donde sono usciti interessanti contributi alla nuova teoria delle funzioni di variabili reali, l'opera del dotto analista belga sarà largamente letta ed apprezzata.

G. VIVANTI.

E. T. WHITTAKER, G. N. WATSON. *A course of modern analysis.* 2ª ed. Cambridge, Univ. Press, 1915: 8⁰ p, VIII + 560.

Questo eccellente trattato, ricco di contenuto e corredato da molte notizie storiche e bibliografiche e da un numero grandissimo di esercizi, è particolarmente consigliabile a chi voglia acquistare una sicura e profonda conoscenza dei fondamenti dell'analisi. Crediamo inutile entrare in molti particolari; basterà accennare brevemente agli argomenti svolti. Essi sono, per la I P. (*Processi analitici*): Numeri complessi, convergenza, continuità, integrazione, funzioni analitiche, residui, sviluppi in serie, sviluppi asintotici, serie di Fourier, equazioni differenziali lineari, equazioni integrali; per la II P. (*Funzioni trascendenti*): funzione gamma, funzione zeta, funzioni ipergeometriche di Legendre, di Bessel, di Mathieu, equazioni della fisica matematica, funzioni ellittiche.

Dobbiamo rilevare due piccole inesattezze storiche. Il reciproco del teorema di Cauchy non è dovuto ad Osgood (p. 87), ma a Morera; la formola detta di Maclaurin non fu data per la prima volta da Sirling nel 1717 (p. 94), ma da Taylor nel 1715. G. VIVANTI.

ROBERT P. RICHARDSON *and* EDWARD H. LANDIS, *Fundamental Conceptions of Modern Mathematics. Variables and Quantities, with a Discussion of the General Conception of Functional Relation.* 8⁰ picc. p. XXI + 216. Chicago and London. The Open Comt publ. Comp., 1916.

Quest'opera è — per dichiarazione degli autori — di critica costruttiva; appartiene, quindi, alla forma della critica più importante ed utile alla scienza, anzi così utile ed importante da poter sostenere il paragone con le indagini aventi per scopo la conquista di nuovi territori. Il tema però — sarebbe vano negarlo — non è di quelli a cui tutti s'interessano: posto al confluente della matematica, della filosofia e della logica esso riuscirà ostico a tre categorie di lettori: perciò era stretto dovere degli autori (per non parlare del loro interesse) di sforzarsi di adornarne la trattazione con tutte le attrazioni possibili; al contrario essi sdegnarono di ricorrere anche a quei piccoli onesti artefici con cui ogni autore si studia di allettare i propri lettori.

Digitized by Google

Anzitutto, si crede di trovarci di fronte ad un lavoro completo, mentre in realtà si ha un piccolo frammento di un'opera di grande mole; infatti 170 pagine sono riunite sotto il titolo *Variabili e quantità*, al quale nell'indice è poi sovrapposta l'indicazione di Parte I; quanto al resto, intitolato *Sul concetto generale di relazione funzionale*, è un estratto dalla X Parte di quell'opera, ove però si trovano applicati alcuni termini tecnici spiegati nella VII Parte, essa pure inedita. Quando avremo detto che le 170 pagine di cui componesi la I Parte non presentano alcuna divisione che conceda di quando in quando un pò di respiro al lettore, avremo offerti sufficienti argomenti per dimostrare che i signori Richardson e Landis hanno totalmente dimenticata l'aurea massima (dovuta forse a Monsieur de la Palisse) che « si scrive per essere letti ».

Non abbiamo creduto di tacere queste osservazioni, per due ragioni. Anzitutto nella speranza che gli autori ne tengano conto preparando per la stampa le parti seguenti della loro grande opera (1). E poi perchè siamo in presenza di persone rispettabili (2) che pensano con la loro testa, dopo di avere presa completa notizia di quanto scrissero i loro predecessori, e perchè i criteri a cui costantemente si ispirarono (necessità di distinguere nettamente i concetti affini, opportunità di introdurre nomi nuovi per designare concetti nuovi, ecc.) sono degni dell'approvazione di tutti e meriterebbero la più larga diffusione.

Il volume che ci sta sott'occhio, per essere analizzato completamente ed a fondo, esigerebbe uno spazio ed una competenza che a noi fanno difetto. Non vogliamo però chiudere questo semplice annunzio senza osservare che i vari indici che esso contiene rendono possibile usarlo come opera di consultazione, perchè col loro mezzo agevole riesce a ciascuno il rintracciare i passi che gli interessano o gli autori che ha più a cuore.

G. L.

---

(1) In un'Appendice si trova esposto un particolareggiato indice generale di tutta l'opera; riferiamo *nell'originale* i titoli delle varie parti, perchè i neologismi introdotti rendono vano ogni tentativo di traduzione:

Part II. Domains and Ranges. III. Limits, Bounds and Appanages. IV. Continuity and the Incommensurable Quantities. V. The Transfinites. VI. Symbols, Signs and Sigla. VII. The Dictions of Algebra and in Particular the Equations. VIII. Transformations. IX. Functional Relations. X. Differentiation. XI. Integration. XII. Continuity with Functional Relations. XIII. The Monogenic and Analytic Functional Relations.

(2) I lettori del *Monist* ne conoscono l'importante articolo *Numbers, Varia les and Mr. Russell's Philosophy* pubblicato nel Luglio 1915.

Digitized by Google

Mathematische Abhandlungen HERMANN AMANDUS SCHWARZ *zu scinem fünfzigjährigen Dokterjubilum an 6 August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern.* Mit don Bildnis von H. A. Schwarz und 53 Figuren im Text. Berlin, Springer 1914, 8° gr. VII, VIII-451.

Questo bel volume, progettato e composto quando la pace regnava ancora in Europa, fu presentato al venerando prof. Schwarz pochi giorni dopo che era scoppiato l'immane conflitto. Ai voti espressi in quel giorno all'eminente scienziato da connazionali si associano col cuore tutti coloro che ne apprezzano l'alto valore, in particolar modo gli analisti ed i geometri italiani che tanto appresero dai suoi lavori sul calcolo delle variazioni e sulle superficie d'area minima.

Una raccolta di memorie di autori differenti sopra svariatissimi temi sfugge ad un'analisi particolareggiata; onde ci è forza limitarci a riprodurre, tradotto, l'indice dei lavori che contiene, solo richiamando l'attenzione dei lettori sull'importanza dei soggetti svolti e sul valore degli autori:

BOLZA. *Sopra i problemi di calcolo delle variazioni che hanno disuguaglianze per condizioni secondarie.*

CARATHÉODORY. *Dimostrazione elementare del teorema fondamentale delle rappresentazioni conformi.*

CAUER. *Sul metodo di Pfeiffer.*

FÉJER. *Sulla convergenza delle serie di potenze nei limiti di convergenza nei casi di una rappresentazione conforme sul piano semplice.*

HARTOGS. *Sulla dimostrazione di un teorema della teoria delle funzioni analitiche di parecchie variabili.*

HENSEL. *La rappresentazione esponenziale dei numeri di un corpo algebrico nel campo di un divisore primo.*

HESSENBERG. *Dimostrazione elementare di una proprietà di massima del quadrangolo inscrittibile.*

HETTNER. *Sulla superficie d'area minima di Schwarz.*

HILB. *Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari del terz'ordine con tre punti singolari.*

HILBERT. *Sopra gli invarianti d'un sistema di quantesivogliano forme.*

HOLDER. *Approssimazioni nella teoria delle equazioni differenziali.*

HURWITZ. *Sopra la funzione di Weierstrass.*

JACOBSTAHL. *Contributi alla teoria di Kronecker dei numeri algebrici.*

JAHNKE. *Un sistema ortogonale relativo alle funzioni* theta *di treargomenti.*

Digitized by Google

JUNG. *Sulla classe canonica di una curva algebrica situata sopra una superficie algebrica.*

KNESER. *Sulla teoria del determinanti.*

KOEBE. *Sopra le funzioni analitiche d'un argomento che possiedono un teorema d'addizione e gli integrali abeliani che ammettono un numero finito d'inversioni.*

KORN. *Due applicazioni del metodo delle approssimazioni successive.*

LAMPE. *Alcune relazioni di geometria elementare che scaturiscono dalle proprietà delle radici dell'unità.*

LANDAU. *Sopra i numeri primi in forme quadratiche definite e le funzioni* zeta *di corpi puramente cubici.*

LICHTENSTEIN. *Sopra una equazione integro-differenziale e uno sviluppo di funzioni arbitrarie.*

MERTENS. *Sopra la formazione di equazioni cicliche di grado* λ^2, *ove* λ *è un numero dispari primo.*

MOHRMANN. *De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum.*

MUNTZ. *Sul teorema di approssimazione di Weierstrass.*

NOEVIUS. *Determinazione analitica di alcune porzioni finite di superficie d'area minima, il cui contorno consta di tre rette, di cui due si tagliano e la terza è paralleta al piano delle due prime.*

ROTHE. *Sull'ottica geometrica in un mezzo non omogeneo ove l'indice di rifrazione varia con continuità.*

SALKOWSKI. *Sopra una specie particolare di congruenze di rette.*

SCHMIDT. *Osservazioni sulla teoria del potenziale.*

SCHOTTKY. *Intorno alla dimostrazione del teorema di Lindemann.*

SCHRUTKA. *Dimostrazione del teorema « la somma delle distanze di un punto da tre altri è minima quando esse formano fra loro angoli eguali ».*

SCHUR. *Sopra lo sviluppo di una funzione.*

SIMON. *Sophie Germain.*

STEINITZ. *La teoria generale dei corpi e il teorema fondamentale dell'algebra.*

TOEPLITZ. *Bemerknng über einen Satz von Mercer.*

G. L.

Digitized by Google

Curve piane.

H. WIELEITNER. *Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung. I Teil: Gestat-Vliche erhältnisse. Mit. 97 Figuren*, p. 146. Sammlung Göschen, numero 435 (1). Berlin und Leipzig 1914 (Prezzo del vol. leg. Mk 0, 90).

Fra le discipline matematiche nessuna forse trova più numerose e svariate applicazioni della teoria delle curve piane: così, per limitarci a due esempi, dal puro analista viene invocata come mezzo per enunciare sotto forma espressiva alcuni risultati astratti, mentre nella geometria descrittiva assicura una base larga e solida a tutte le costruzioni relative a figure curvilinee. Donde la ragione per cui le indagini intorno a quelle figure sono innumerevoli e multiformi e le esposizioni metodiche dei risultati ottenuti formano ormai una splendida collezione.

Ora, mentre nelle origini alla « forma » delle curve si prestò così poca attenzione che parecchi eminenti investigatori commisero su tale argomento alcuni errori così grossolani da sembrare oggi incredibili, la « topologia delle curve piane » viene oggi riguardata per un capitolo essenziale di una teoria completa di quelle figure. A ragione pertanto il prof. WIELEITNER, ben noto cultore della teoria e della storia delle linee piane (cfr. questo *Bollettino*, 1908-09, p. 120) ha dedicato il primo dei volumetti della *Sammlung Goeschen* concernenti quelle figure ai procedimenti che furono sinora escogitati ed applicati per determinare le forme sotto cui si possono presentare.

Nella I Sez. di esso egli ha esposti i punti di vista ed i procedimenti generali, fra cui meritano una speciale menzione la » variazione dei coefficienti » nell'intento di « sciogliere i punti multipli » e il « principio dei segni » del Reuschle; essi vengono applicati allo studio delle forme sotto cui si possono presentare le curve del 3^0 e nel 4^0 ordine. Nella II egli si è occupato della ricerca dei punti all'infinito, servendosi a tale scopo di coordinate omogenee. La III tratta delle curve come inviluppo di rette, stu-

(1) In questa raccolta erano già state trattate le curve piane da E. BEUTEL (v. *Bollettino*, T. XIII, 1911, p. 124-5); esaurita l'edizione, ignoriamo se la Casa Goeschen non abbia creduto giovarsi ancora della collaborazione del BEUTEL o se questi abbia preferito mutare editore; fatto sta che egli ripubblicò altrove il proprio lavoro: v. il volumetto intitolato *Algebraische Kurven. Kurvendiskussion. Mit 67 Figuren in Text.* 8° p. 97 (Stuttgart und Berlin, Fr. Grub. 1914).

Digitized by Google

diate mediante le note coordinate plückeriane, qui con speciale riguardo alle curve di terza e di quarta classe.

Alle singolarità d'ordine superiore delle curve piane è dedicata l'ultima Sez., ove la parte di protagonista è affidata al celebre « parallelogramma di NEWTON »; col mezzo di esso vengono completamente descritte le singolarità che può presentare una quartica.

La lettura del presente volumetto non esige elevata cultura matematica; molti esempi, accompagnati da figure disegnate con cura, illustrano gli sviluppi teorici; essi, anzi, sono tanto numerosi che si può dire abbraccino tutte le curve speciali di ordine determinato sino ad oggi studiate. Per tutti questi motivi il volumetto in questione va caldamente raccomandato a chi vuole impratichire nella delineazione delle linee plane.

G. L.

Réflexions sur la propriété d'une courbe algébrique dont les contour marqueraient les traits d'un visage connu et Pensées sur une méthode de voir par les narines à l'usage de ceux qui ne voient pas par les yeux par MAXIMILIAN COMPTE (sic) DE LOMBERG, Livourne MDCCLXX, p. 7+24.

Se è interessante il conoscere quello che insegnano le più recenti pubblicazioni, non lo è meno avere notizie di quanto contengono libri vecchi e rari di cui nessuna storia parla; onde ai numerosi curvofili sparsi per tutto il mondo non sarà discaro l'essere informati sulla materia svolta nell'opuscolo di cui riferimmo più sopra il titolo. Chi però nutrisse la speranza di apprendere ivi l'esistenza e le proprietà di una nuova linea subirebbe una grave delusione, chè la curva di cui ivi si parla, nel testo non è in alcun modo determinata: solo si ricorda che HUDDE affermò a LEIBNIZ la possibilità di delinearla, col vincolo di dover passare pei punti più caratteristici di un volto umano. Onde si può dire che il presente cenno non abbia in fondo che il filantropico scopo di risparmiare ad altri le faticose ricerche instituite da chi scrive nell'intento di procurarsi un ghiotto boccone e che nonebbero per risultato che un cibo insipido e senza virtù nutrienti. Se poi i pittori lo consulteranno, vi troveranno esortazioni e consigli intorno alla convenienza di applicare la scienza della misura all'arte loro; cosa ormai inutile, perchè oggi il pittore di ritratti trova nella fotografia un ausiliare ben più efficace di quello che troverebbe nella geometria.

Al dire dei compilatori del *Dizionario biografico universale* (Vol. III,

Digitized by Google

Firenze 1844-45) Giuseppe Massimiliano LOMBERG, che è autore dell'opuscolo in discorso, sarebbe stato *un gran matematico;* in realtà fu un uomo colto, che scrisse piacevolmente intorno a soggetti di coltura generale. Nato a Brünn (Moravia) nel 1729 o 30, ascoltò a Halle le lezioni del Wolf. Divenne dopo ciambellano dell'imperatore e fu addetto all'ambasciata austriaca a Parigi; venne poi in Italia al seguito del duca di Würtemberg; al ritorno a Stuttgart attaccò briga con alcuni funzionari di quel sovrano ed in conseguenza ne abbandonò la corte. Ritornò allora in Italia ed ivi pubblicò l'opuscolo succitato; viaggiò poi in Corsica ed in Africa; rimpatriato, morì nel 1792. Furono famosi alcuni ingegnosi strumenti di sua invenzione, un ricchissimo gabinetto di fisica da lui raccolto ed un'opera intitolata *Memoriale d'un uomo di mondo*, che, pubblicato nel 1775, ebbe l'anno appresso l'onore di una seconda edizione. G. L.

Curve sghembe.

H. MICHNIK. *Beiträge zur Theorie der Sonnenuhren.* I. Teil, 4°, pag. 12 (Leipzig, Teubner 1914).

M. CHASLES, in un passo (p. 496) dell'« Aperçu historique » osserva che la natura delle « linee temporarie » non è ancora nota; per determinarla egli propone la seguente questione: « si supponga di tagliare un emisfero con una serie di piani paralleli fra loro ed inclinati al piano di base dell'emisfero stesso e di dividere i risultanti archi circolari in un dato rapporto; i punti di divisione costituiranno una curva a doppia curvatura situata sull'emisfero; facendo passare per essa un cono col vertice nel centro dell'emisfero e segando questo con un piano si ottiene una delle linee temporarie ». Tale problema, che il grande geometra francese designava per « une belle question d'analyse », si trova risoluta nel presente lavoro con semplici considerazioni di geometria analitica; le quali conducono alle equazioni ed alle proprietà della curva sferica, del cono projettante e delle curve sezioni e mostrano anche la dipendenza esistente fra le figure considerate con molte curve speciali notevoli. G. L.

Notizie

Tema di matematica posto a concorso dall'Accademia Reale di Danimarca: « Mentre, in seguito ai lavori di BRUNN, di MINKOWSKI e di altri, si sono intraprese ricerche d'ordine generale sulla teoria delle superficie convesse — supponendo soltanto le superficie chiuse ed ovun-

Digitized by Google

que convesse (ipotesi che abbraccia i poliedri convessi) — non furono considerate sinora, pure da un punto di vista altrettanto generale, il caso delle superficie non convesse e, dal punto di vista proiettivo, chiuse. Ora sembra probabile che sotto molti punti di vista, le superficie di quest'ultima categoria godano di proprietà altrettanto semplici, fors'anche più semplici, delle superficie ovunque convesse (v. la notissima memoria dell'HADAMARD, dal titolo: *Le surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques;* Journ. de Mathém., 1898); perciò l'Accademia promette la propria Medaglia d'oro (del valore di circa 440 fr.) ad uno studio ove siano *gettate le basi di una teoria generale delle superficie non dappertutto convesse, projettivamente chiuse ed esenti da linee doppie. Si raccomanda di sforzarsi di ridurre, per quanto possibile, le ipotesi relative a proprietà infinitesimali delle superficie.*

Scadenza 31 Ottobre 1919. Le memorie aspiranti al premio possono essere scritte in danese, danese-norvegese, svedese, inglese, tedesco, francese e latino, ed essere anonime; esse vanno indirizzate a M. KNUDSEN, professore al Politecnico di Kopenhagen.

Un nuovo ausiliare di bibliografia matematica è rappresentato dall'*Union List of Mathematical Periodicals by* D. E. SMITH e CAROLINE EUSIS SEELY, pubblicato nel N. 9 del *Bulletin of the Bureau of Education* degli Stati Uniti d'America. Per 81 periodici esclusivamente matematici e per 90 riviste ed atti accademici relative alle scienze in generale la nuova pubblicazione insegna in quali Biblioteche pubbliche della grande Confederazione si trovino; il lavoro in discorso è, quindi, della massima utilità per gli americani che si occupano di matematica, ma è chiaro che potrà servire ad altri, benchè in occasioni più rare.

Manoscritti arabi. Alcuni anni fa l'Ambrosiana di Milano si è arricchita di numerosi manoscritti arabi provenienti dallo Yemen, i quali furono di recente studiati da EUGENIO GRIFFINI. Parecchi fra essi sono duplicati di altri esistenti a Berlino; ma un codice contiene traduzioni di Ermete Trismegisto e del Pseudo-Tolomeo (*Liber latitudinis clavis stellarum*).

Frère Gabriel Marie si è spento a Parigi il 25 Ottobre 1916 all'età di 82 anni. Fu generale dell'ordine dei « Frères des Ecoles Chrétiennes » ed autore di varii manuali pubblicati con le sigle F. J., F. I. C., F. G. M.; fra essi ricorderemo come eccellenti in special modo gli *Exercises de géométrie,* che raggiunsero nel 1912 la V ed., gli *Excercises de géométrie descriptive* di cui nello stesso anno uscì la IV ed. ed il *Manuel de mécanique* pubblicato poco dopo la sua morte. La soppressione delle corporazioni reli-

Digitized by Google

giose in Francia l'obbligò a riparare in Belgio e l'occupazione di questo per parte delle truppe tedesche lo ricondusse in patria.

La storia della scienza nel Nuovo mondo. Il prof. FLORIAN CAJORI, così favorevolmente noto anche in Europa per numerose e pregevoli pubblicazioni, venne di recente chiamato ad insegnare Storia delle Matematiche nell'Università di California; se non erriamo, è questa la prima cattedra di tale materia che esista nel mondo. G. SARTON, il dotto belga che cercò scampo negli Stati Uniti quando la sua patria fu invasa dall'esercito tedesco, venne nominato « Research associate of the Carnegie Institution in the History of Science »; tale situazione gli concede di dar nuova vita alla rivista *Iris* ed a riprendere le sue antiche ricerche sopra LEONARDO DA VINCI, al quale egli, con l'aiuto del Prof. PLAYGAIR MAX MURRICH, intende di consacrare un'opera d'insieme, ormai possibile dopo le innumerevoli ricerche speciali fatte sopra la poliedrica mentalità del nostro sommo compatriotta.

Annuario degli istituti scientifici italiani. Con questo titolo è uscito (Roma, Athenaeum, 1918) sotto gli auspici dell'« Associazione per l'intesa intellettuale, un volume dovuto alle cure di SILVIO PIVANO. È una pubblicazione che va segnalata ai nostri lettori perchè illustra tutti gli istituti scientifici esistenti in Italia, cioè le Università, i Politecnici, le altre Scuole superiori, le Accademie, le Società scientifiche, le Biblioteche, gli Archivi, le Gallerie ed i Musei, indicando per ciascuno lo sviluppo storico, l'ordinamento attuale, le finalità, i mezzi finanziari e il personale. Chiudono l'opera due Indici, il primo analitico, riguardante tutti gli istituti ordinati per regioni, l'altro alfabetico, comprendente tutti i nomi propri che s'incontrano nel volume.

Il più antico documento concernente Leonardo Fibonacci. I meglio noti cronisti pisani tacciono del FIBONACCI, tanto che il primo cenno a stampa del grande matematico fu fatto nel 1707 nella nota *Cronaca dei matematici* di B. BALDI. Acquista, quindi, grande valore il seguente passo dei *Ricordi di Ser Perizolo da Pisa dall'anno 1422 sino al 1510*, pubblicati da F. BONAINI nel T. II, Parte II, dell'*Archivio storico Italiano* (p. 388): « Lionardo Fibonacci fuo nostro concive, e vivette nelli anni 1203. Vidde tutto el mondo; tornoe a Pisa, e recò i numeri arabichi e l'aritmetica, e ne compose un libro che in questo tempo, dello anno 1506 Pisano, nello tempo scrivo, tiene la famiglia delli Gualandi, e vi sono expressi li numeri fino al decimo, quale composto forma la decina, et insegna contare el... ».

Digitized by Google

BOLLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E STORIA
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
Serie II. Vol. I. Fasc. IV — Ottobre-Dicembre Anno XX. 1918

CARLO PASCAL

ALBERTO PASCAL

(23 Dicembre 1894 — 28 Gennaio 1918)

Visse soli ventitrè anni. Morì di morte gloriosa ed eroica, libratosi a volo sul suo apparecchio, tra il grandinare dei colpi nemici, impavido e sereno come sempre. Contribuì nel suo ultimo giorno alla splendida vittoria di Monte Val Bella, e cadde mentre il suo lavoro di preparazione andava sviluppandosi, mentre egli vedeva dall'alto le nostre truppe avanzare nei varchi fatti aprire dall'artiglieria, di cui egli aveva diretto i tiri.

Sino al ventunesimo anno aveva dato opera intensa agli studi, che egli aveva intrapreso e proseguito con fervore generoso. Il piccolo manipolo di lavori, che egli, non ancor laureato, soli potè compiere e dare a luce, negli anni 1914 e 1915, rimarrà, credo, nel campo della storia delle matematiche notevole contributo. Quando poi la gioventù italica sorse tutta in armi, e nuovi doveri gli si presentarono, egli si dedicò ad essi con tutto l'ardore dell'animo, e vi prodigò la giovi-

Digitized by Google

nezza e vi sacrificò la vita. Considerò il suo dovere di soldato come una missione sacra, e si immolò al più puro degli ideali, all'ideale della giustizia sul mondo.

Ebbe altezza di intendimenti pari alla nobiltà del cuore: fu buono di una bontà celestiale, fu di candore ineffabile e soave. I suoi genitori ed io e tutti della famiglia nostra ci sentivamo come ristorati dall'onda fresca della sua giovinezza, del suo vigore fisico, intellettuale e morale: lui spento, si è spezzato uno dei più saldi vincoli che ci legava alla vita.

Scritti pubblicati da Alberto Pascal (1)

Girolamo Saccheri nella vita e nelle opere (Estratto dal *Giornale di Matematiche*, volume LII). Napoli, 1914.

Sopra una lettera inedita di Girolamo Saccheri. (Estratto dagli *Atti del R. Istituto Veneto*, Tomo LXXIV, parte II). Napoli 1914.

Sopra i minori del determinante generalizzato di Scholtz-Hunyady. (Estratto dal *Giornale di Matematiche*, vol. LII). Napoli, 1914.

Sui determinanti ottenuti da un altro operando una medesima trasformazione lineare sugli elementi di una o più colonne. (Estratto dal *Giornale di Matematiche*, volume LIII). 1915.

Giovanni Ceva ed il suo carteggio inedito con Vincenzo Viviani. (Estratto dagli *Annali di Matematica pura ed applicata*, Tomo XXIV). Milano, 1915.

L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva e una lettera inedita di Guido Grandi. (Estratto dai *Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere*, vol. XLVIII). Milano, 1915.

Girolamo Saccheri. In *Bibliotheca mathematica* di ENESTRÖM, vol. XIV, serie 3. p. 350. Stokholm, 1915.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantor's Volesuengen über Geschichte der Mathematik (Bibliotheca mathematica, 3. Ser., T. XIV (1914) p. 350).

Tre recensioni pubblicate nel *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* Aprile-Giugno 1915, nel *Giornale di Matematiche*, vol. LIII, 1915 e LIV, 1916, rispettivamente sulle seguenti opere: A. MAIRE, *L'oeuvre scientifique de Blaise Pascal* (Paris, 1912); ANTONIO FAVARO, *Amici e corrispondenti di Galileo Galilei, XXXVI: Bonaventura Cavalieri* (Venezia, 1915); GINO LORIA, *Guida allo studio della storia delle matematiche* (Milano, 1916).

---

(1) Oltre a questi lavori di carattere scientifico o storico vi sono tre articoli pubblicati sul giornale quotidiano *Roma* di Napoli dai titoli seguenti: *Antonio Genovesi* (8 Maggio 1912) e *La precocità nei matematici* (21 Maggio e 30 Giugno 1912).

Digitized by Google

Motivazione delle due medaglie di argento al valore proposte ad Alberto Pascal.

I.

Osservatore dall'aeroplano compì numerosissime ricognizioni sul nemico, spesso volontarie, ed in condizioni atmosferiche avverse; sereno sempre fra l'accanimento degli antiaerei, che più volte gli colpirono l'apparecchio, risoluto e calmo agli attacchi degli aerei nemici.

Mitragliò a bassissima quota truppe nemiche, eseguì numerosissime fotografie e fornì importanti notizie. Conscio, ma sprezzante sempre del pericolo, diè luminosa prova, per abnegazione ed entusiasmo, per costanza ed ardimento, di sentimento di amor patrio e di nobili virtù militari.

Cielo dell'Altipiano di Asiago — Cielo del Carso
Gennaio-Dicembre 1917.

II.

Per un anno intero si prodigò con il più alto entusiasmo ed ammirevole abnegazione nel servizio di ricognizione di areoplano, ottenendo in numerosi arditi voli sempre preziosi risultati. Audace fino alla temerità nella esecuzione di mandati, durante il volo, in un radioso mattino, dopo avere per un'ora trasmesse importanti segnalazioni, portandosi a quota molto bassa sulle posizioni nemiche, alla patria sacrificava combattendo la sua giovine e nobile esistenza.

Geometria iperspaziale.

J. Rey Pastor, *Fondamentos de la geometria proyectiva superior.* Madrid 1916, 8^0 gr., p. XXII + 444.

Il punto di partenza delle ricerche esposte in questo notevole volume è da ricercarsi nel celebre *Programma* pubblicato da F. Klein salendo, nel 1872, sulla cattedra che eragli stata conferita nell'Università di Erlangen. I concetti fatti quivi conoscere sono dal nostro A. dichiarati e largamente commentati nella I Parte *(Sistematizzazione della geometria)* del suo lavoro; nella quale si apprendono, anzitutto, i concetti essenziali della Teoria dei gruppi e le proposizioni su cui riposa la Teoria dei gruppi di trasformazioni. Con ciò si hanno elementi sufficienti per dar ragione della nota asserzione di Klein, essere ogni geometria di determinata specie equivalente allo studio di quelle proprietà di una varietà che sono invarianti rispetto ad un determinato gruppo di trasformazioni. L'A. l'illustra con

Digitized by Google

mirabile chiarezza, applicandola alle varie geometrie che furono sino ad oggi considerate (Geometria elementare, Geometria delle inversioni, Geometria della sfera, Geometria proiettiva superiore e Geometria trascendente e delle trasformazioni birazionali) e mettendo in piena luce le principali relazioni che passano fra di esse. Giova riferire, ad intelligenza di quanto segue che, appunto appoggiandosi al surriferito principio di Klein, egli dà la seguente definizione della disciplina oggetto delle sue ricerche: *Chiamasi « Geometria projettiva superiore » quella il cui gruppo caratteristico è costituito da tutte le collineazioni di uno spazio astratto S_n a n dimensioni; essa si propone lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto al detto gruppo o ad uno dei suoi sottogruppi,* e per chiarire il significato di quest'ultima alternativa cita la Geometria projettiva di un S_n con un S_{n-1}, invariante o con una quadrica invariante a $n-2$ o $n-1$ dimensioni. E poichè queste Geometrie abbracciano tutte le svariate direzioni in cui sino ad oggi si è svolta la ricerca sull'estensione figurata, così egli conclude facendo piena adesione all'apoftegma di Cayley, « projectiva geometry is all geometry ». Siaci lecito osservare che se, teoricamente, questo principio è indiscutibile, praticamente può avere (ed ebbe infatti) il deplorevole risultato di screditare e poi far abbandonare le investigazioni di geometria metrica le quali (per invocare soltanto il nome di un grande italiano) ebbero, invece, in Luigi Cremona un estimatore non passivo.

La II Parte dell'opera in esame *(Fondamenti della geometria projettiva reale)* si apre con una rapida rassegna dei vari punti di vista prescelti degli scienziati che, nella seconda metà del Secolo XIX, dopo di avere compiuto un esame critico delle basi della Geometria, vollero renderne più solidi i fondamenti. L'A. espone poi i risultati ottenuti, nel periodo che corre dal Pasch all'Hilbert e suoi discepoli, nell'intento di caratterizzare pienamente lo spazio projettivo astratto a n dimensioni e di determinarne gli elementi col mezzo di coordinate; ci duole che a noi non sia concesso di riferire, neppure in compendio, le considerazioni originali con cui l'A. ha lumeggiate o svolte teorie altrui e le nuove dimostrazioni di lui ingegnosamente congegnate. Notiamo soltanto che egli chiude stabilendo le principali relazioni relative all'incidenza degli spazi lineari contenuti in un S_n.

Egli stabilisce poi (Cap. V) il teorema fondamentale della Geometria projettiva, riguardo al quale fa un'esauriente rassegna delle svariate ricerche compiute da coloro che si proposero di stabilirlo mediante il minimo numero di postulati; così dispone di elementi sufficienti per trattare

Digitized by Google

parecchie importanti questioni, quali quelle relative a la collineazione, la correlazione e la polarità in un S_n, per investigare le proprietà della projezione stereografica in un siffatto spazio e delle collineazioni dotate di una quadrica invariante.

Il seguente Capitolo si inizia con un rapido cenno sul calcolo con projettività e sulle projettività cicliche ed ha per precipuo scopo di gettare le basi di un « Calcolo vettoriale projettivo »; tale intento viene conseguito presentando sotto forma projettiva alcuni concetti e teoremi della geometria metrica elementare, i quali, da tale metamorfosi, nulla acquistano di sostanziale, mentre perdono di perspicuità ed evidenza: ciò sia detto a conferma di un'osservazione fatta più sopra riguardo ad una massima di Cayley ed alle conseguenze che ebbe.

A questo punto l'A. giudica, a ragione, di avere esaurito il proprio programma per quanto concerne il modo reale, epperò passa ad occuparsi dello spazio complesso. Dopo un rapido cenno storico sull'immaginario in geometria, definisce, al modo di Staudt, i punti immaginari delle rette reali e quindi gli spazi lineari immaginari; ed enumera, il che (se non c'inganniamo) non era stato fatto prima di lui, le varie specie di S_r immaginari contenuti in un S_n, ove $n > r$; è questa l'estensione delle considerazioni che, nello spazio ordinario, guidarono a distinguere due specie di rette immaginarie. Ritornando poi agli elementi immaginari nelle forme di I specie, l'A. enumera, paragona e discute i vari metodi sinora proposti per rappresentarli mediante elementi reali, mettendone in luce i pregi e i difetti, le analogie e le dissomiglianze; come epilogo fa conoscere le nuove trasformazioni (antiprojettività, antiinvoluzioni, ecc.) di recente introdotte nella scienza dal Juel e dal Segre.

Nell'ultima parte della sua opera l'egregio professore dell'Università di Madrid si è proposto di fare uno studio sintetico delle corrispondenze algebriche, tentativo che merita di venire segnalato in un'epoca in cui la geometria non è più di moda e perchè fu coronato da buon successo grazie all'uso di considerazioni originali, le quali è presumibile prendano posto stabile nella scienza, dopo di avere forse subiti ulteriori perfezionamenti. Notiamo ad es. l'impiego della corrispondenza *derivata* di una corrispondenza algebrica; se questa ha per equazione $f(x, y) = 0$ la nuova è rappresentata dall'equazione $f(x, x + z) = 0$; l'A. ne fa applicazione alla dimostrazione del teorema che assegna il numero dei punti uniti di una corrispondenza algebrica. Da notarsi è pure l'uso delle superficie di Riemann, l'utilità delle quali nell'argomento in questione era già stata segnalata dal

Digitized by Google

de Paolis. Di quel teorema il Rey Pastor fa svariate applicazioni (ad es. alle involuzioni in S_n). Considerazioni analoghe costituiscono il midollo spinale del saggio intorno alla definizione sintetica di una curva analitica, con cui il nostro A. pone termine al suo lavoro.

Nel chiudere questo cenno intorno all'egregia opera — che l'Accademia delle Scienze di Madrid ha premiata nel 1914 e che vede la luce grazie all'illuminata munificenza di un patrizio spagnuolo, desideroso di commemorarne il III centenario della pubblicazione del *Don Chisciotte* — è nostro dovere rilevare che lo stile, ad un tempo chiaro e vigoroso, ne rende la lettura istruttiva e dilettevole; onde essa va consigliata come modello a coloro che anima la nobile aspirazione di accrescere il numero dei cultori della geometria. Nè va taciuto che, alla fine di ogni Capitolo, l'A. ha presentato un Elenco delle opere a cui egli attinse, aggiungendo al titolo di quelle meno note, qualche frase incisiva atta a farne conoscere l'essenza e misurare il valore; sistema ottimo che auguriamo venga da altri adottato in avvenire.

G. L.

O. Fernàndez Banos, *Estudio sintético de los espacios complejos da n dimensiones*. Madrid, 1917, 8°, p. 80.

Questa memoria — che è la I del T. II delle *Publicaciones del Laboratorio y Seminario matemàtico* — fu presentata dall'A. come Dissertazione di Laurea alla Facoltà di Scienze dell'Università di Madrid. Scritta per suggerimento e sotto la direzione del prof. Rey Pastor, essa rappresenta lo svolgimento di uno dei punti più originali dell'opera superiormente analizzata, cioè lo studio delle varie specie di S_r complessi contenuti in un S_n $(n>r)$. lineare e reale.

Premesso (Cap. I) un breve riassunto di quanto si legge nella succitata opera riguardo a *Lo spazio projettivo astratto*, l'A. stabilisce (Cap. II) i principi fondamentali per lo studio dello spazio projettivo complesso. Insegna poi (Cap. III) a costruire, mediante projezioni opportune, gli spazi complessi delle varie specie, ne determina (Cap. IV) le intersezioni e chiude (Cap. V) estendendendo, per quanto è possibile, agli spazi superiori le rappresentazioni reali degli elementi dello spazio ordinario ideate da Gauss, da Staudt e da Riemann.

Come utile complemento all'opera del Rey Pastor questo scritto ha un posto assicurato nella letteratura matematica ed accresce il valore di quella mostrando la fecondità dei germi che ivi si trovano; ma anche prescindendo da siffatta considerazione genetica, deve riguardarsi come un'aggiunta utilissima alle migliori esposizioni della geometria iperspaziale.

G. L.

Digitized by Google

Geometria costruttiva.

J. HJELMSLEV, *Geometrische Experimente, aus dem dänischen, übersetz von* A. ROHRBERG. *Mit 56 Figuren im Text.* 8° gr. pag. 68. Leipzig und Berlin. B. G. Teubner 1915.

Il titolo del presente opuscolo può trarre facilmente in errore: si potrebbe, infatti, pensare che esso trattasse di una geometria, non razionale, ma sperimentale; esso, invece, insegna una serie di procedure per risolvere i problemi di geometria, di natura differente da quelle generalmente in uso.

Per dichiararne la natura ricordiamo che, mentre Euclide limitò a riga e compasso gli strumenti da usarsi nelle costruzioni geometriche, sembra che, poco dopo la sua scomparsa, i suoi compatrioti abbiano ritenuto lecito anche l'uso delle *inserzioni* (collocamento di un segmento di data lunghezza con gli estremi sopra due date curve e passante per un dato punto); assai più tardi Newton propose che la concoide di Nicomede fosse aggiunta alle linee di uso lecito; finalmente più recentemente a riga e compasso furono unite, come apparati concessi, la squadra e la riga a due orli. Ora l'Hjelmslev — ben noto ai nostri lettori quale distinto cultore della geometria descrittiva — inspirandosi a concetti di maggiore libertà (di cui, a sua insaputa, aveva dato l'esempio Nicola Fergola) propone, nella sua presente pubblicazione, l'impiego regolare di un nuovo ausiliare, il *compasso a tre punte*, e, accrescendo forza ed estensione alla *procedura per tentativi* (di cui lo stesso Lagrange aveva fatta rilevare l'utilità nelle sue *Leçons à l'Ecole Normale*), la fa assurgere ad un'importanza che non era stata sino ad ora riconosciuta.

A siffatte conseguenze egli giunse combinando eleganti considerazioni topologiche, che lo rivelano degno compatriota di Zeuthen e Juel, con profondi sviluppi algebrici, che lo dimostrano ottimo discepolo di J. Petersen. Naturalmente alle nuove procedure è necessario ricorrere di regola soltanto quando si tratti di problema di grado superiore al secondo; però il loro campo non è limitato alle questioni algebriche, onde esse vanno segnalate e raccomandate ai cultori della Geometria descrittiva, che è senza dubbio il ramo più importante della Geometria costruttiva. Nè va taciuto che per assicurare al proprio lavoro una base ed un contenuto veramente scientifici, l'A. fu costretto a digressioni di materia prettamente dottrinale e così fece qualche notevole aggiunta alle nostre cognizioni intorno ad alcune curve speciali.

I problemi a cui l'A. applica i nuovi metodi grafici sono numerosi ed

Digitized by Google

assai bene scelti; essi però certamente non esauriscono i campi in cui trovano applicazione tali metodi (ed i congeneri che si potrebbero escogitare); noi siamo anzi convinti che chi si sentisse tentato di spigolarvi, non perderà il suo tempo in vane ricerche e potrà arrecare qualche miglioria tanto alla geometria teorica quanto alla pratica.

G. L.

Geometria elementare.

E. VENERONI, *Le similitudini.* Livorno, R. Giusti, 1916. 16°, p. 160 (Prezzo L. 1).

Il libro del prof. Veneroni aggiunge una perla di più alla ricca collana di opere scientifiche e letterarie della « Biblioteca degli studenti » del Giusti di Livorno.

La nuova pubblicazione, oltrechè essere degna di plauso per la chiara, semplice e rigorosa esposizione, presenta una notevole originalità di trattazione dell'argomento « Le similitudini » grazie al capitolo premesso sulle figure geometriche *equiverse* e *controverse.* In questo primo capitolo si stabilisce anzitutto il criterio fondamentale per decidere quando due *raggi* (collineari o no) siano equiversi o controversi, chiamando « *equiversi* due raggi tali che i punti di ciascuno seguano la rispettiva origine nel medesimo senso della retta, *controversi* se la seguono in senso contrario »; si definiscono poi « *equiversi* o *controversi* rispettivamente due *segmenti AB, A'B' riferiti,* fra i quali cioè sia posta una corrispondenza biunivoca, secondochè sono *equiversi* o *controversi AB, A'B'* cui essi appartengono »; indi « due *angoli* riferiti $\widehat{mn}$, $\widehat{pq}$ di un piano sono detti *equiversi* rispetto ad una retta t del piano, che non passi per alcun vertice nè sia parallela ad alcun lato, quando i *segmenti MN, PQ* individuati sopra la retta dai punti d'intersezione coi lati corrispondenti degli angoli sono *equiversi* e il numero totale dei lati incontrati è *pari*, oppure se sono *controversi* e lo stesso numero è *dispari* »: « due *angoli* $\widehat{mn}, \widehat{pq}$ *di un piano* sono detti invece *controversi* rispetto alla t quando gli stessi *segmenti* sono *controversi* e lo stesso numero è *pari*, oppure *equiversi* e quel numero *dispari* »; dal verso degli angoli si deduce poi quello dei triangoli e dei diedri, chiamando « *equiversi* o *controversi* due *triangoli* se sono rispettivamente equiversi o controversi due loro angoli omologhi: *equiversi* o *controversi* due *diedri* secondochè siano rispettivamente tali le loro *sezioni* con un piano che incontri lo spigolo »; infine dal verso dei triangoli si ricava il verso

Digitized by Google

dei *triedri* rispetto ad un piano con un criterio del tutto analogo a quello dato per dedurre il verso degli angoli da quello dei segmenti.

Nei capitoli II, III e IV si dà la definizione di figure « *simili* », si dimostrano le principali proprietà inerenti delle figure medesime, si espongono le costruzioni fondanentali relative e si stabiliscono i criteri necessari per distinguere le figure simili « *dirette* » dalle « *inverse* »: « si dice che una *figura* (F) è *simile* ad una *figura* (F') o che è riferita alla (F') in una similitudine con rapporto k se la (F) è riferita alla (F') in modo che il *rapporto* fra la distanza di due punti qualunque della prima e quella dei due punti omologhi della seconda sia costante e uguale al numero assoluto $k\,(\neq 0)$; se in particolare $k = 1$, la figura (F) si dice *congruente* alla figura (F'). Una similitudine rettilinea, o piana, o spaziale si dice *diretta* o *inversa* secondochè sono rispettivamente *equiversi* o *controversi* due *segmenti*, o *angoli* (oppure *triangoli*), o due *triedri* (oppure *tetraedri*) omologhi. Una congruenza fra due fasci di raggi di uno stesso piano o fra due stelle di raggi o fra due fasci coassiali di semipiani si dice *diretta* o *inversa* secondochè rispettivamente sono *equiversi* o *controversi* due *angoli* o due *triedri* o due *diedri* omologhi. Il prodotto di due similitudini o *congruenze* è una similitudine o congruenza *diretta* se le due date sono entrambe dirette o inverse; e *inversa* se le due date sono l'una e l'altra inversa.

Da queste premesse sgorga allora semplice uniforme e spontanea la trattazione dei molteplici tipi di similitudini e congruenze che l'A. svolge nei capitoli successivi con rigore e ricchezza di particolari, trattando prima delle congruenze e quindi delle similitudini, la cui classificazione è analoga e coordinata a quella delle prime perchè « ogni similitudine subordina sempre una determinata congruenza ».

Tanto le similitudini che le congruenze si potrebbero, a mio parere, dividere in due grandi tipi: *semplici* e *composte*, chiamando *composte* quelle che sono il prodotto di due semplici, perchè allora riesce assai chiara e breve la seguente classificazione delle similitudini stesse:

1). Le congruenze dirette semplici.

a) *l'identità*: rettilinea, piana, spaziale, nella stella,
b) *la traslazione*: rettilinea, piana, nel fascio, spaziale,
c) *l'opposizione*: nel fascio,
d) *la rotazione*: piana, spaziale, nel fascio, nella stella,
e) *la simmetria rispetto ad un punto*: piana,
f) *la simmetria rispetto ad una retta*: spaziale, nella stella.

Digitized by Google

2). **Le congruenze inverse semplici.**

a) *la simmetria rispetto ad un punto*: rettilinea, spaziale,
b) *la simmetria rispetto ad un raggio o ad un semipiano*: nel fascio,
c) *la simmetria rispetto ad una retta*: piana,
d) *la simmetria rispetto ad un piano*; spaziale, nella stella,
e) *l'opposizione*: nella stella.

3). **Le congruenze dirette composte.**

a) *l'elicomozione* (rotazione e traslazione): spaziale,
b) *l' elicomozione simmetrica* (simmetria risp. ad una retta e traslazione): spaziale.

4). **Le congruenze inverse composte.**

a) *l'antitraslazione* (simmetria risp. ad una retta o ad un piano e traslazione): piana o spaziale,
b) *l'antirotazione* (simmetria risp. ad un punto o ad un piano e rotazione): spaziale o nella stella.

5). **Le similitudini dirette semplici.**

a) *la similitudine diretta*: rettilinea,
b) *l'omotetia diretta*: piana, spaziale,

6). **Le similitudini dirette composte.**

a) *l'omotetia inversa piana* (simmetria risp. ad un punto e omotetia diretta)
b) *la rotomotetia* (rotazione e omotetia diretta): piana, spaziale,
c) *la rotomotetia simmetrica* (simmetria risp. ad una retta e omotetia di retta): spaziale.

7). **Le similitudini inverse composte.**

a) *la similitudine inversa rettilinea* (simmetria risp. ad un punto e similitudine diretta),
b) *l' omotetia inversa spaziale* (simmetria risp. ad un punto e omotetia diretta),
c) *l'antiomotetia* (rotazione e omotetia spaziale inversa): spaziale,
d) *l'antiomotetia simmetrica* (simmetria risp. ad una retta o ad un piano e omotetia diretta): piana o spaziale.

Il libro si chiude con due capitoli di importanti applicazioni delle similitudini: il Cap. XIV tratta delle similitudini ed omotetie di circonferenze

Digitized by Google

e di sfere e il Cap. XV studia i movimenti delle figure geometriche dimostrando che « condizione necessaria e sufficiente affinchè sulla retta, nel piano o nello spazio due figure siano sovrapponibili mediante movimento è che siano direttamenie congruenti ».

Questa piccola opera, mentre fornisce nel Cap. I dei criteri assai semplici, atti a stabilire il verso delle figure geometriche, criteri che abilmente esposti potrebbero essere anche utili ad una trattazione più completa della uguaglianza e della similitudine delle figure geometriche nelle scuole medie di 1° e 2° grado, d'altra parte nell'insieme offre agli studenti del 2° Biennio degli Istituti Tecnici (sezione Fisico-matematica) una ottima prepazione allo studio delle corrispondenze proiettive fatto nel 1° biennio dell'Università; per cui, tenuto conto ancora dei notevoli pregi di forma e di rigore dell'opera stessa, si può concludere che essa è veramente degna di considerazione e di elogio. G. BURNENGO.

Analisi infinitesimale.

G. TORELLI *Lezioni di Analisi infinitesimale date nella R. Università di Napoli.* Napoli 1918; Aggiunta all'Errata Corrige; Napoli 1919. (Libreria Alvano, L. 20).

È un libro nato nella Scuola e per la Scuola. Aprendolo a caso e leggendone un brano, si sente la voce del maestro che impartisce la lezione.

L'A., tra un metodo che poco o nulla vuol concedere all' intuizione, e un altro che ne fà frequente appello, segue la giusta via di mezzo, avendo presenti i diversi indirizzi cui tende una scolaresca numerosa com'è quella dell'Università di Napoli, e non dimenticando le gloriose tradizioni della cattedra occupata dal TRUDI, dal BATTAGLINI, dal CESÀRO alla memoria dei quali è dedicato il volume.

Il corso s'inizia con poche nozioni sugl'insiemi numerici. L'A. presuppone noto il concetto di numero reale, e si ferma a richiamare due dei varî modi d'individuare un tal numero: il metodo delle classi contigue e quello delle sezioni.

La nozione di limite per una funzione e quella di continuità sono stabilite alla maniera di WEIERSTRASS con la quale si evita l'uso del principio della libera scelta (o di ZERMELO). Il teorema di HEINE-CANTOR sull' uniformità della continuità è dedotto in base alla nozione di oscillazione di una funzione in un punto, con una dimostrazione che trae la sua semplicità da opportune premesse. L'A. ha qui, come in varie questioni fondamentali del corso, mostrato di attenersi al principio di scegliere la via

Digitized by Google

più agevole o più naturale, anche se questa non è la più breve. Talvolta, ad una dimostrazione un po' lunga e delicata Egli ne fa precedere una schematicamente assai semplice, mettendo in rilievo le linee principali del ragionamento, e avvertendo i punti che richiedono la maggiore attenzione. Così, ad es., fa per stabilire la regola di derivazione delle funzioni inverse e quella delle funzioni di funzione.

Sono pure date fin da principio le regole per la derivazione delle funzioni circolari che l'A. suppone note al lettore dalla trigonometria elementare, pur rilevando, nel debito posto, come si potrebbero definire analiticamente.

L'integrazione indefinita viene subito introdotta come operazione inversa della derivazione, e vengono esposti con ordine e chiarezza i varî procedimenti per l'integrazione, mentre la questione dell' esistenza dell'integrale viene rimandata un po' più in là.

La convenzione fondamentale del calcolo ordinario relativamente al differenziale della variabile indipendente è illustrata in modo chiaro ed efficace con un esempio tratto dalla fisica.

I concetti di funzione e continuità sono poi estesi al caso di più variabili in modo facile e breve. L'A. non si sofferma ad una definizione precisa di campo (dominio) a due o più dimensioni, ma si limita a taluni esempî dai quali il lettore comprende come si possa passare a casi meno particolari, che sebbene non riescano a fissare la nozione di dominio pluridimensionale in tutta la sua generalità, possono ritenersi sufficienti ad una trattazione elementare del calcolo infinitesimale delle funzioni di più variabili.

Dimostrato il teorema relativo all'inversione dell'ordine delle derivazioni, stabilita la regola per la derivazione delle funzioni composte, e dato il concetto di differenziale totale, l'A. fa un opportuno accenno all'integrazione multipla indefinita come operazione inversa alla derivazione reiterata.

Alla nozione d'integrale definito, secondo RIEMANN, per una funzione limitata in un intervallo, l'A. perviene con la considerazione delle somme che il PEANO chiama *poligoni circoscritti* e *poligoni inscritti* alla funzione, definendo in base al lemma di DARBOUX l'integrale per difetto. Stabilisce poi il criterio di RIEMANN per l'integrabilità e ne fa le consuete applicazioni.

Debbo a questo punto osservare che, come in molti trattati, anche in questo non trovo alcun esempio di funzione non integrabile, mentre

Digitized by Google

dallo stesso criterio di RIEMANN si può facilmente dedurre che una funzione discontinua in ogni punto di un intervallo non è integrabile in quest'intervallo. Tale proprietà può essere utilizzata per dimostrare che se una funzione integrabile in un intervallo si mantiene positiva in questo intervallo il suo integrale esteso all'intervallo stesso è pure positivo. Questa proprietà è generalmente sostituita da un'altra, che non ha bisogno del criterio d'integrabilità, e con la quale si afferma che nell'ipotesi stessa l'integrale non può essere negativo.

Stabilita l'esistenza dell'integrale doppio indefinito d'una funzione continua, l'A. ne deduce il concetto d'integrale doppio definito anche nel caso che la funzione supposta limitata abbia nel campo (limitato da una linea chiusa continua) un numero finito di linee di discontinuità. L'integrale doppio definito è introdotto come il risultato di due successive integrazioni semplici, ma l'A. dimostra che esso può considerarsi come limite di somme doppie, deducendone la formola d'inversione delle integrazioni successive. Egli mostra poi come si può estendere il concetto di integrazione multipla al caso di una funzione di più di due variabili rimandando a trattati più ampi per gli sviluppi ulteriori di questa teoria.

Particolare attenzione richiede il paragrafo nel quale si svolge la questione assai delicata del cambiamento della variabili negl'integrali multipli. L'A. è qui costretto a dare una dimostrazione schematica della formola fondamentale per la trasformazione d'un integrale triplo, limitandosi al caso che nel campo d'integrazione la funzione sia continua (v. Aggiunta all'Errata Corrige). Egli non si ferma sulla natura del campo d'integrazione rispetto alle nuove variabili ed ammette senz'altro l'integrabilità rispetto ad esso della funzione trasformata. Evita inoltre la questione circa il segno del campo convenendo di assumere opportunamente i limiti delle successive integrazioni. Infine, fatta l'ipotesi che il determinante jacobiano delle antiche variabili rispetto alle nuove (in numero di tre per fissare le idee) si mantenga diverso da zero nel campo stesso, Egli ammette che il campo sia talmente ristretto che in esso siano sempre diversi da zero un dato minore del second'ordine del determinante jacobiano e un dato elemento di questo minore. Ad eliminare poi ogni dubbio sulla validità della formola di trasformazione in tutto il campo, egli accenna (v. Agg. all'Err. Corr.) ad un procedimento col quale si può togliere detta restrizione.

L'A. dedica tre capitoli alle applicazioni del Calcolo alla geometria, illustrando gli argomenti con numerosi esempi fra i più notevoli. In pro-

Digitized by Google

posito è da notare che sebbene nel volume non siano proposti esercizi (pei quali l'A. avverte che nel suo corso si giova della raccolta del VIVANTI) non mancano, a chiarimento ed illustrazione delle varie teorie, opportuni e bene scelti esempi, che da soli costituiscono un ottimo corredo per l'esercitazione dello studente.

Il corso si chiude con un' esposizione elementare della teoria delle equazioni differenziali.

L'A. ha poi avuto l'idea felicissima di aggiungere al corso, a titolo di complemento, alcune conferenze da lui tenute nel Seminario matematico dell'Università di Napoli.

Le prime sei conferenze riguardano le moderne ricerche sull' integrazione. Premesse alcune nozioni complementari sugl' insiemi, e introdotta la nozione di misura, l'A. viene ad esprimere sotto la forma di VITALI-LEBESGUE la condizione d'integrabilità secondo RIEMANN. Stabilite le nozioni relative alle funzioni misurabili, Egli passa al concetto d'integrale definito secondo LEBESGUE di una funzione limitata, ne determina le proprietà fondamentali e ne fa il confronto con l'integrale di RIEMANN. Considerando poi il caso di una funzione non limitata, introduce la nozione di sommabilità, e perviene al concetto d'integrale indefinito di LEBESGUE, mostrando, con le delicate considerazioni del LA VALLÉE-POUSSIN, come con questo concetto si possa risolvere — nel campo delle funzioni sommabili — il problema della determinazione delle funzioni primitive.

La teoria in discorso risente naturalmente della ricerca ancor fresca. Ed invero l'opera di lima non è al presente abbastanza avanzata per un assetto didattico definitivo, perciò la materia si presta meglio come argomento di conferenze che di lezioni. È bene ha fatto il TORELLI a raccogliere queste sue accurate conferenze e a pubblicarle assieme alle lezioni di Calcolo, non essendo ormai più ammissibile che i giovani che si avviano alla laurea in matematica, sconoscano questi nuovi ed importanti sviluppi della teorica dell'integrazione.

Non posso però lasciare quest'argomento senza richiamarne su taluni punti l'attenzione dei trattatisti.

Nella dimostrazione della misurabilità di un insieme formato da un'infinità numerabile d'insiemi misurabili si fa, in generale, tacito uso del postulato di ZERMELO. Ora non mi costa che sia stata data una dimostrazione indipendente dal detto postulato, e non mi sembra sia facile darne una. D'altra parte la proprietà in discorso è così fondamentale per l'intera teoria dell'integrazione secondo le vedute di LEBESGUE che non credo di

Digitized by Google

esagerare asserendo che tale teoria poggia su basi ancora non molto solide.

Ed un'altra osservazione. Una funzione f è detta, generalmente, misurabile in un insieme J quando l'insieme dei punti di J nei quali f ha un valore maggiore del numero A, è sempre misurabile qualunque sia A. Ora taluni suppongono che f possa avere anche valore infinito (sebbene di segno determinato) in punti di J, ma allora non si può asserire, che J è misurabile. È necessario quindi o modificare la definizione di funzione misurabile aggiungendo l'ipotesi della misurabilità dell'insieme dei punti di J in cui f prende valore infinito (come fa il nostro A., nell'agg. all'Err. Corr.) oppure — e ciò mi sembra più consigliabile — supporre che la funzione abbia sempre valore finito in J, potendo essere anche non limitata in J: in ogni caso bisogna apportare quà e là opportuni ritocchi alla teoria di LEBESGUE.

Nelle altre quattro conferenze l'A. s'intrattiene su taluni strumenti che servono alla risoluzione grafica di questioni fondamentali d' Analisi. Egli dà una descrizione accurata e chiara del curvimetro, del planimetro polare, dell' integrafo per quadrature di ABDANCK - ABAKANOVICZ, e di un integrafo del PASCAL per equazioni differenziali, mettendo in rilievo le questioni analitiche più notevoli alla cui risoluzione grafica si applicano tali ingegnosi strumenti. E la trattazione teorica non poteva chiudersi più felicemente che con queste interessanti applicazioni pratiche: per esse le concezioni astratte della matematica s'illuminano di nuova luce e acquistano un'importanza palpabile specialmente per chi non è incline all'investigazione teorica senza la mira della pratica utilità.

Il libro del TORELLI merita bene un posto onorevole fra gli ottimi trattati di Analisi infinitesimale, destinati alla gioventù studiosa, dei quali si è arricchita la letteratura matematica italiana in questi ultimi anni. Esso ha visto la luce in tempi assai difficili, è stato scritto in momenti di dolori e di ansietà. L'A. ebbe nei primi mesi della nostra guerra la sventura di perdere alla fronte il figlio primogenito — più che una bella promessa nella scienza matematica — e vide poi partire successivamente gli altri sei figliuoli per la grande causa italiana e del mondo. Ma con fede incrollabile nei grandi destini della Patria, Egli ha proseguito immutabilmente la sua opera di scienziato e di maestro, esempio magnifico di serenità e di alta coscienza del dovere.

Vadano a Lui, da queste pagine, i nostri fervidi auguri, il nostro riverente saluto.

M. CIPOLLA.

Digitized by Google

Rappresentazione conforme

J. REY PASTOR. *Teoria de la representacio conforme. Conferencie donades el Juny de 1915, redactas per* E. TERRADES. Barcellona, Institut d'estudios catalans (senza data; pervenuto al *Bollettino* in principio dell'anno 1917). 8° p. 115; prezzo 3 pesetas.

Continuando (cfr. p. 114-5) ad esplicare la nobile missione che si assunse di diffondere nella propria patria i più recenti portati delle scienze matematiche il prof. Rey Pastor scelse come soggetto di una serie di conferenze, tenute a Barcellona all'Istituto scientifico, la Teoria della rappresentazione conforme. Chiunque abbia presenti i molteplici campi dell'analisi, della geometria e della fisica matematica in cui questa s'incontra e le profonde e vaste investigazioni a cui essa diede origine, dovrà riconoscere che tale scelta non poteva essere più felice. Se una cosa è da deplorare è che la pubblicazione che annunciamo sia stata fatta in una lingua (il catalano) famigliare a ben pochi cultori delle scienze esatte; tuttavia, puntellandosi sopra le frequenti formole e riccorrendo eventualmente ad un dizionario, non è impossibile tener dietro all'autore nelle sue dotte argomentazioni. A questo annunzio aggiungiamo il seguente indice degli argomenti, il quale basterà a porgere al lettore un'idea della materia svolta nell'eccellente pubblicazione dell'egregio professore dell'Ateneo Madrileno:

Notizie storiche. Conferenza I: Proprietà delle funzioni analitiche. II. Rappresentazione conforme dei campi elementari. III. Il Lemma di Schwarz (1870) e le sue applicazioni. IV. Teoremi di Koebe e di Bieberbach. V. Teorema d'esistenza di Riemann. VI. Principio di simmetria di Schwarz; metodo alternato; rappresentazione conforme dei campi limitati da curve analitiche. VII. Applicazione della rappresentazione conforme al problema di Dirichlet. VIII. Teorema generale sopra la rappresentazione conforme. Bibliografia. G. L.

Opere complete ed Enciclopedie.

Oeuvres de G. H. HALPHEN *publiées par les soins de* C. JORDAN, H. POINCARÉ, E. PICARD *avec la collaboration de* E. VESSIOT. T. I. 8° gr. pagine XLIII+570. Paris, Gauthier-Villars 1918.

G. H. Halphen nacque a Rouen il 30 ottobre 1844; negli anni 1862-66 fu alunno della scuola Politecnica e poi della Scuola d'applicazione per l'artiglieria di Metz. Ottenute le spalline di sottotenente, venne inviato primo a Auxonne e poi a Strasburgo; ma, mentre disimpegnava coscien-

Digitized by Google

ziosamente i suoi compiti militari, iniziava le ricerche matematiche destinate a renderlo famoso. Durante la guerra del 1870-71 egli appartenne all'esercito del Nord e collaborò così efficacemente al buon esito della missione affidata al generale Faidherbe da ottenere al termine della campagna il grado di capitano. Nominato nel 1872 ripetitore alla Scuola politecnica, Halphen prese dimora a Parigi e si dedicò col massimo impegno agli studi scientifici. Il definitivo assetto da lui dato alla teoria delle caratteristiche nella teoria delle sezioni coniche, la fondazione della teoria delle curve gobbe algebriche (che gli valse nel 1882 il premio Steiner dell'Accademia di Berlino), le sue ricerche sugli invarianti differenziali (esposte sotto forma di tesi di laurea nel 1878), la memoria (premiata nel 1880 dall'Istituto di Francia) sulla riduzione delle equazioni differenziali lineari a forme integrabili, le sue acute investigazioni sopra i punti singolari delle curve piane ed altri lavori dell'Halphen mostrarono alla Francia di avere trovato chi era capace di continuare nobilmente le sue gloriose ininterrotte tradizioni scientifiche. E ciò venne nel modo più solenne riconosciuto dall' Accademia delle Scienze il 15 Marzo 1886 col chiamare l' Halphen nel proprio seno, a voti quasi unanimi, al posto lasciato vacante dal Bouquet.

Pochi mesi dopo (ottobre 1886), dietro sua domanda, egli riprese il servizio attivo nell'esercito e fu destinato all' XI Reggimento d' Artiglieria avente per sede Versailles; nello stesso anno cominciava la stampa del grande *Traité des fonctions elliptiques*, che lasciò sgraziatamente incompiuto e che probabilmente fu causa della repentina malattia che lo trasse alla tomba appena quarantaquattrenne, il 21 Maggio 1888.

I lavori di Halphen si distinguono, non soltanto per l' originalità dei metodi e per la novità dei risultati, ma anche per la perfezione nei più minuti particolari e per la forma impeccabile. Riunirli e diffonderli fra la gioventù studiosa era ad un tempo rendere doveroso omaggio a lui e contribuire al progresso della scienza a lui diletta. L'iniziativa di tale nobile impresa è merito della sua vedova; l' avere accolta, appoggiata e tradotta in atto tale idea è merito della Sezione di Geometria dell' Accademie delle Scienze, coadiuvata dal noto matematico Vessiot e dal figlio dell'Halphen.

Il volume, con cui s' inizia questo nuovo elemento brillante della collana di Opere complete di grandi matematici francesi, si apre con la ristampa delle necrologie dell'eminente matematico dettate dal Picard e dal Poincaré, a cui tien dietro (ottimo esempio che vorremmo seguito in avvenire) la *Notice* sopra i propri lavori scritti dell' Halphen in occa-

Digitized by Google

sione della sua candidatura all' Istituto di Francia. Seguono poi le memorie da lui pubblicate nel periodo 1864-76, nonchè una nota *Sur l'intégration des équation linéaires* (1864) sinora inedita.

Chiudiamo questo annuncio con l'augurio che, malgrado la terribile crisi che di recente sconvolse l'Europa tutta ed in particolare la Francia, l'edizione così saviamente deliberata, possa venire condotta ben presto a termine.

G. L.

Archimedis Opera omnia cum Commentariis Eutocii iterum edidit F. H. Heiberg. Lipsiae B. G. Teubner. Vol. I (1910) p. XI + 499. Vol. II (1913) p. XVIII + 554. Vol. III (1915) p. XCVIII + 448.

Con la prima edizione delle *Opere di Archimede* l'Heiberg ha iniziato la splendida serie di pubblicazioni che lo resero famoso tanto fra i cultori della classica filologia, quanto fra quelli delle scienze esatte. Il successo di quella pubblicazione è attestato dal bisogno, che si manifestò in un periodo relativamente breve, di una nuova edizione. E questa differisce dalla precedente principalmente nel II volume; chè i due libri *Sui galeggianti* si leggono ora nell' originale greco, in base ad un ms. trovato a Costantinopoli; inoltre è aggiunto il frammento metodologico del grande siracusano, la cui scoperta costituisce il più memorabile avvenimento recente nel campo dell'antica storia della matematica; finalmente sono date, in base a nuovi documenti, preziose informazioni sopra il « loculus Archimedius ». Inoltre anche le altre parti delle meritorie fatiche dell'Heiberg, ricevettero numerosi miglioramenti, su cui non ci è permesso di dilungarci, ma che naturalmente ne accrescono di gran lunga il pregio.

G. L.

J. Rey Pastor. *Introducio a la Matematica superior. Estado actual, Métodos y Problema.* Madrid, Biblioteca Corona, 1916 8° picc. p. 202.

Sono sei conferenze tenute nel 1915 all'Università di Madrid per mostrare alla gioventù spagnuola che la matematica ha oggi raggiunto un livello assai più elevato di quello segnato dai trattati francesi anteriori al 1850, oggi ancora adottati come libri di testo nelle scuole del Regno iberico.

Nella prima di esse il giovane e valente professore espone i più recenti punti di vista sui fondamenti dell'Algebra e dell'Analisi, giungendo sino ai numeri transfiniti. Segue un'analoga Conferenza dedicata ai fondamenti

Digitized by Google

della Geometria, della quale si apprendono le critiche mosse al sistema euclideo ed i risultati che diedero i lavori intrapresi in quest'ultimo secolo per migliorarlo. La terza Conferenza è dedicata alla Teoria delle variabili reali, l'esposizione della quale è spinta tant'oltre da potere toccare le più recenti generalizzazioni delle nozioni d'integrale. Lo stesso tema è ulteriormente svolto nella Conferenza seguente, ove l'A., partendo dall'operazione « passaggio al limite » dà notizia delle più recenti ricerche sopra le Serie di Fourier, le Serie divergenti, le Funzioni con infinite variabili e le Equazioni integrali ed integro-differenziali. La quinta Conferenza fa conoscere la Teoria delle funzioni di variabili complesse secondo i metodi di Cauchy, di Weierstrasse e di Riemann; essa si chiude con qualche cenno intorno alle più importanti funzioni particolari. Ancora più ampio è il tema dell'ultima Conferenza, ove l'A. descrive il nuovo assetto conseguito da molte teorie matematiche per effetto dell' introduzione della nozione di gruppo; la materia è ordinata in modo da condurre alla conclusione che la Matematica moderna ha oggi per fondamenti i tre concetti: Insieme, Funzione, Gruppo.

Il prof. Rey Pastor conosce a fondo l'arte d'interessare i propri ascoltatori o lettori; egli sceglie con un'abilità notevole gli argomenti ed i fatti più salienti; d'altra parte scrive con una chiarezza ed una precisione che rivelano in lui un eminente insegnante; finalmente, con le citazioni numerose ed esatte di opere importanti, egli offre un prezioso aiuto ai lettori che aspirano di approfondire i temi che egli ha dovuto semplicemente sfiorare.

Perciò il libro in esame merita di prendere posto tanto nelle biblioteche destinate agli studenti, quanto sul tavolo degli scienziati maturi; giacchè, se a quelli esso insegnerà delle cose del tutto nuove, a questi porgerà certe vedute d'insieme che riescono tanto utili a coloro che si dedicano a ricerche speciali.

G. L.

Meccanica

PIETRO BURGATTI. *Lezioni di Meccanica Razionale.* 1 vol. gr. in 8°, pagine VII+501 (Lire 18). Bologna, Nicola Zanichelli, 1916.

Queste « Lezioni », presentate in bella veste tipografica dell'editore Zanichelli, forniscono un buonissimo testo italiano per lo studio della Meccanica Razionale nelle nostre Università e Politecnici, fra i non molti finora esistenti in Italia. Esse servono quindi vuoi a liberare meglio i no-

Digitized by Google

stri studenti da trattati stranieri anche troppo voluminosi ed inadatti alle nostre scuole, vuoi ad offrir loro una guida più precisa, completa e direi quasi più concreta di quella generalmente offerta dai soliti corsi litografati. Pure essendo il libro presentato sotto modesta veste di « Lezioni », si può dire che in esso nulla manchi di quanto sostanzialmente si trova nei più reputati ed estesi trattati di Meccanica razionale (ad es. nei tre volumi dell'Appell) e può quindi non solo esser seguito dagli studenti della meccanica, ma giovare pure ai cultori della Fisica matematica, poichè può valere d'introduzione a questa Scienza la Meccanica dei corpi continui. Si può anzi soggiungere che vi si trovano argomenti che si cercherebbero invano nei trattati predetti. Tale è pure l'esteso capitolo (pagine 438-88) intitolato « Discorso sullo sviluppo storico della meccanica » nel quale lo studioso trova una « rapida corsa attraverso i secoli per rintracciare nelle opere dei sommi pensatori i successivi progressi della meccanica » sotto forma spigliata e limpida, più adatta a riuscire impressa nei giovani che non un'arida bibliografia, od una esposizione critica, la quale sarebbe risultata o troppo ingombrante ed inadatta all'opera, o troppo incompleta.

L'A. si è riservato di completare l'opera pubblicando a parte una raccolta di problemi e relative soluzioni; tuttavia era forse possibile senza accrescere di troppo la mole del libro, e per maggiore comodità dello studente, far seguire alle singole parti gli esercizî appropriati a ciascuna di esse.

Comunque però il lettore ignaro proverà meraviglia che in un solo volume abbiano potuto essere ben trattati tutti gli argomenti vitali della meccanica classica. Egli è che l'A. ha decisamente adottato in modo sistematico il calcolo vettoriale assoluto, con i concetti, le notazioni e le definizioni « elaborate con fine acume e bell'arte » dai Proff. C. Burali-Forti e R. Marcolongo.

È superfluo insistere ancora sulle ragioni critiche, già ampiamente svolte da questi AA. (*), che li hanno condotti a mettere in luce e ad evitare gli errori riscontrati sia nelle opere dei cosidetti quaternionisti, degeneri seguaci dell'Hamilton del quale han travisato l'opera; sia in quelle dell'irrazionale e pesante sistema tedesco; sia pure in quelle di sistemi più ru-

(*) V. le Note contenute nei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. 23, 24, 25, 27: nel *Nuovo Cimento* (1907), nell'*Enseignement Mathématique* (1907, 1909, 1910, 1911); ed infine la Prefazione del t. I e l'Appendice del t. II dell'*Analyse vectorielle générale*, Pavia, Mattei e C. (1912 e 1913).

Digitized by Google

dimentali ma non meno illogici (adottati per es. dal Love, Appell,....) in cui accanto al classico vettore d'Hamilton, chiamato vettore *libero*, vengono considerate altre specie di vettori *scorrevoli* (glissants), *legati* (*liés*), formanti classi distinte e nient'affatto contenute in quelle dei vettori liberi (come vorrebbe il senso comune), essendo anzi più estese di quest'ultima. E con altrettanta ragione rigettarono la distinzione dei vettori in *polari* ed *assiali*, già ritenuta indispensabile da certi fisici (*) specie per la trattazione dei fenomeni elettrici e magnetici, mentre è stato dimostrato che se ne può benissimo fare a meno (**).

L'introduzione del « vettore assiale », generato dalla considerazione del l'asse momento d'una coppia di forze, corrisponde ad un'analisi incompleta dei concetti fondamentali. Esso è veramente il risultato d'una operazione sopra due vettori (cioè l'indice del loro bivettore di Peano-Grassmann, od il loro prodotto esterno o vettoriale, già considerato dall'Hamilton e dal Saint-Venant nel 1845), e dipende della rotazione che si deve fissare (una volta per tutte) nella definizione dell'operazione; ma è logicamente assurdo volerlo considerare come un vettore nuovo (*assiale*) diverso dai vettori comunì (detti allora *polari*). Non altrimenti nel campo dei numeri reali sarebbe assurdo considerare il quoto di due di questi come un numero di specie diversa, mentre è ivi necessario distinguere l'operazione dalla coppia di numeri a cui è applicata e dal risultato. Per il fatto che nella definizione di questa operazione è necessario tener conto dell'*ordine* dei numeri della coppia, mentre ciò non è per es. necessario nel prodotto, chi oserebbe affermare la necessità di distinguere in due specie i numeri risultanti dalle due operazioni? Tutti son ben d'accordo, come vuole la logica ed il buon senso, nel considerare invece a parte tali operazioni e le loro proprietà, similmente a quanto è appunto stato fatto nel campo dei vettori dagli autori citati Burali-Forti e Marcolongo. E se, per il naturale procedere incerto del calcolo vettoriale nei suoi primi stadi, sarebbe ingiusto far troppo carico di siffatti concetti illogici in C. Maxwell, P. Currie, P. Langevin, ecc., dopo che la critica li ha di-

(*) V. l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, Tome IV, vol. 5 *Notions géometriques fondamentales*. Exposé, d'aprés l'article allemand de M. Abraham (Milan) par. P. Langevin (Paris) 1912.

(**) V. per es. il Cap. IV del cit. tomo II dell' *Anal. vect. gén.* « Électrodynamique des corps au repos ou en mouvement » (pp. 94-112).

Digitized by Google

mostrati tali e sorpassati, è giusto che ciò abbia ad essere riconosciuto da chi vuole essere al corrente del progredire scientifico.

L'uso sistematico fatto del calcolo vettoriale, almeno per la parte del « sistema minimo », sotto la forma elaborata dalla Scuola italiana predetta, ha permesso al nostro A. di mettere una volta meglio in evidenza la grande efficacia e semplicità apportata nella trattazione di ogni argomento, insieme alla spontanea eleganza e chiarezza dei risultati, in tutta la meccanica classica. E per la notevolissima opera di affinazione ed assestastamento subita dal detto calcolo nell'ultimo decennio, il libro del nostro A. è naturalmente riuscito migliore dei precedenti, in cui il calcolo vettoriale è usato come vero mezzo (*), e non come un qualsivoglia accessorio (di cui non si crede più possibile fare a meno, come forse si desiderebbe) atto a mostrare come talvolta qualche gruppo di formule viene espresso più concisamente ed elegantemente, riuscendo così a creare soltanto delle duplicazioni inutilmente ingombranti.

Ecco ora un rapido sommario delle varie parti del libro, che potrà meglio mostrare ai cultori della meccanica l'importanza dell'opera.

L'introduzione contiene i primi elementi del calcolo vettoriale (vettori, loro operazioni, derivate ed applicazioni geometriche; gradiente d'un campo numerico;...).

Ogni forza applicata ad un corpo rigido, come ogni rotazione istantanea di tale corpo, è rigorosamente rappresentata da un *bipunto* (formazione geometrica di 2ª specie di Peano), e sarebbe quindi stato opportuno poter dare un cenno di queste forme per trattare poi nel modo migliore i sistemi indicati.

Ma, per evitare le forme geometriche di Peano e presumibilmente per timore d'un distacco troppo sentito dall'antico, l'A. considera i « sistemi di vettori ». Conviene però notare che questi « sistemi di vettori » sono nient'altro che i vettori *scorrevoli* e quindi *non sono vettori*. Converrebbe chiamarli *punto-vettori*, non volendo fare la teoria generale dei bipunti essi ai quali sono in sostanza equivalenti. Allora, ad es. (p. 21), il « momento di un punto vettore (A, u) rispetto al punto Q, che è $(A - Q) \vee u$, risulta funzione del punto-vettore (A, u), mentre non è una funzione del solo vettore u ». Lo stesso dicasi delle cose seguenti. Però sta il fatto

(*) Ad es. pure nella bella *Meccanica Razionale* (Hoepli 1905) del Prof. R. Marcolongo, della quale dobbiamo augurarci di poter presto godere dell'intera nuova edizione.

Digitized by Google

che cambiando « sistemi di vettori » in « punto-vettori » tutto ciò che lo A. dice è perfetto.

Sempre volendo evitare i bipunti, si poteva pure procedere in altro modo [come trovasi fatto nel 1° vol. della 2ª ediz. (1917) della cit. *Meccanica Razionale* del Prof. Marcolongo], esponendo tale trattazione nel 1° capitolo della Statica, parlando allora di « sistemi di forze » con la relativa considerazione del vettore somma dei vettori delle forze (risultante), dei loro momenti, riduzioni, equivalenza, ecc.

Alla *Cinematica* son dedicati cinque capitoli, nel primo dei quali si tratta della velocità e dell'accelerazione, con applicazione ai moti oscillatori ed ai moti elementari. Nel 2° capitolo è notevole l'introduzione degli « stati cinetici » in luogo dei così detti « moti infinitesimi » con la trattazione dei tre moti o stati cinetici elementari, e della composizione dei moti finiti od infinitesimi. Nel 3° capitolo sono studiate le relazioni fra i moti rispetto a due osservatori (moti relativi) e nel 4° i moti paralleli ad un piano con numerosi esempi, casi particolari ed applicazioni alle curve rotolanti. Nel 5° capitolo si considera il moto intorno ad un punto fisso, o d'una figura sferica sulla propria sfera, con applicazione al rotolamento d'un ellissoide a centro fisso su di un piano; si stabiliscono le componenti della velocità angolare rispetto agli assi mediante gli angoli di Eulero, ed infine si passa alla cinematica del corpo libero.

Nel 1° capitolo della *Statica* vengono esaminati i concetti e postulati fondamentali, esponendo poi la dimostrazione sulla risultante di forze applicate in un punto, le condizioni d'equivalenza dei sistemi con la considerazione dei varî casi particolari (forze parallele, forze in un piano), con applicazione ai baricentri. Nel 2° capitolo viene esposto ed illustrato il metodo classico sulle reazioni dei vincoli per i problemi d'equilibrio con importanti ed ampie considerazioni sull'attrito, mentre nel 3° capitolo vengono trattati gli stessi problemi col principio dei lavori virtuali. Nel 4° capitolo è considerato l'equilibrio dei fili flessibili e inestendibili liberi, con varie applicazioni alle catenarie (ad arco di cerchio, omogenea, dei ponti), eppoi ai fili distesi su di una superficie levigata o con attrito.

Il 1° capitolo della *Dinamica*, dopo illustrate le leggi fondamentali di Newton, tratta delle dimensioni delle grandezze fisiche, del principio di omogeneità e della similitudine dinamica, svolgendo infine la dinamica del punto libero, con applicazione ai problemi più classici e più semplici della balistica e della meccanica celeste. Come utilissima introduzione a quest'ultima si ha poi il capitolo 6°, dedicato al problema dei tre corpi.

Digitized by Google

Nel 2° capitolo son dedotte dal principio di d'Alembert le equazioni differenziali di Lagrange e di Hamilton, che vengono applicate nel capitolo seguente al moto d'un punto sopra una curva, d'un corpo rigido intorno ad un asse (e d'una figura piana nel suo piano), opportunamente illustrate dallo studio del pendolo ideale e del pendolo fisico. Nel 4° capitolo sono introdotti i campi potenziali, è stabilito il principio della conservazione dell'energia, nonche i teoremi generali pel moto dei sistemi sul baricentro e sulla coppia d'impulso. Nel successivo cap. 5° dopo trattato dei momenti d'inerzia ne vien fatta applicazione al calcolo dell'energia cinetica, dell'impulso e del suo momento per un corpo rigido, allo studio del moto di questo corpo intorno ad un punto fisso (equazioni d'Eulero), in particolare ai moti per inerzia (od alla Poinsot). Son notevoli gli esempi relativi al pendolo sferico, al giroscopio, alla trottola, con la considerazione dei moti di precessione.

Il capitolo 7° è dedicato allo studio del moto relativo dei corpi, con applicazioni ai pendoli ed ai gravi, tenuto conto della rotazione terrestre. Segue il teorema fondamentale sulle forze istantanee (urti), con applicazione al caso di due corpi (sfere, piano e sfera) elastici od anelastici, ed al pendolo balistico.

Gli ultimi tre capitoli son dedicati alla *Meccanica dei corpi continui.* Nel primo s'introducono altri elementi necessari d'analisi vettoriale (la rotazione, la divergenza dei campi vettoriali, ed i teoremi relativi a questi ed al gradiente), oltre agli operatori (di Laplace) Δ e Δ', al concetto di derivata d'un vettore in una direzione e rispetto ad un punto (omografia vettoriale), di teorema di Stokes e le applicazioni alla teoria dei potenziali. Nel seguente capitolo, dopo studiate le deformazioni infinitesime dei corpi, si stabiliscono i fondamenti della statica e della dinamica dei fluidi, con particolare riguardo ai liquidi perfetti. Nel capitolo ultimo sono invece esposti i fondamenti della teoria matematica dell'elasticità, con particolare riguardo ai corpi isotropi ed ai fenomeni d'equilibrio.

Il libro, chiuso dal Discorso storico, contiene sotto forma elementare, sfrondata da inutili sviluppi analitici (senz'essere affatto « pratico » nel senso volgare della parola), tutti i concetti della meccanica classica ed è senza dubbio una buona guida per gli studenti a cui è dedicato. Non sarebbe cosa facile mettere in rilievo tutta la notevolissima particolare elaborazione della materia fatta dall'A.; come esempio possiamo addurre la deduzione delle equazioni dell'equilibrio e del moto dei sistemi vincolati, svolta in modo affatto indipendenti dalle coordinate cartesiane, il che non si era ancora potuto ottenere in tutte le trattazioni precedenti.

MATTEO BOTTASSO

Digitized by Google

Geometria generale.

M. D'OCAGNE, *Cours de géométrie pure et appliquée de l' Ecole Polytechnique*. T. I. 1917, p. XI+375; T. II, 1918, p. 364, Paris, Gauthier, Villars et C.

La questione dell'indirizzo e dei limiti che conviene assegnare alle Matematiche nelle Scuole destinate alla formazione degli ingegneri si agita da tempo in tutto il mondo civile ed anche in Italia fu oggetto di ripetuti studi da parte di persone competenti e diede origine a discussioni in periodici tecnici o durante adunanze di specialisti. Siamo, quindi, convinti che la presente pubblicazione dell'eminente geometra che legò il proprio nome ad un ramo di Geometria applicata (la Nomografia) sarà festeggiata calorosamente e ricercata da molti, onde apprendere quale assetto abbia ricevuto nella gloriosa Scuola Politecnica parigina quell'insegnamento di geometria pura ed applicata che alcuni (estendendo il concetto didattico che diede origine ai corsi unici di Analisi matematica) vorrebbero istituire nei nostri Politecnici in luogo dei vari corsi geometrici che vi si trovano. Ma la lettura della bellissima opera del d'Ocagne mostra subito che all'adozione presso di noi di un corso analogo a quello da lui svolto si frappone un ostacolo gravissimo, generato dalla differenza di coltura matematica che esiste fra i giovani che frequentano l'« Ecole polytechnique » e quelli licenziati dalle nostre scuole medie; chè, mentre questi conoscono a mala pena le parti più elementari della Geometria e dell'Algebra, a quelli sono noti i concetti fondamentali e la tecnica di tutti i rami della Matematica che entrano nel programma del nostro primo biennio universitario. In conseguenza il d'Ocagne trovandosi nella condizione privilegiata di chi ha il còmpito di completare un edificio del quale esistono già solide basi, potè usufruire, a seconda dei casi, di tutti i vari metodi che stanno a disposizione di chi si accinge a investigare le proprietà della estensione figurata.

Di tale diritto egli fece l'uso più ampio, ispirandosi a quel largo ecclettismo che, da qualche decennio, prese il posto dell'austera purezza di metodo a cui sempre si attennero i trattatisti del secolo scorso. Se questo disinvolto sistema sia destinato a gioire di un favore permanente dirà l'avvenire; a noi incombe l'obbligo di osservare che della conseguita libertà il nostro A. fece l'uso più ragionevole, usando in ogni circostanza lo strumento logico capace di condurlo con maggiore facilità, sicurezza e rapidità alla mèta. Altre pregevoli caratteristiche dell' opera in discorso

Digitized by Google

è l'attenersi il d'Ocagne alle idee didattiche che governano l'« Ecole polytechnique » sin dalla sua creazione porgendo ai tecnici una larga base dottrinale e facendo frequenti applicazioni della Geometria cinematica, così magistralmente svolta dal suo famoso predecessore A. Mannheim.

Il primo volume dell'opera in esame è quasi totalmente consacrato alla teoria; chè, prescindendo da un Capitolo sulla Prospettiva, non tocca che temi di pura geometria: *Trasformazioni geometriche*, *Geometria infinitesimale*, *Geometria della retta*, *Geometria cinematica;* però nelle applicazioni dei principi generali s'incontrano sviluppi ed applicazioni che riusciranno giovevoli all'ingegnere. In particolare va segnalata una plejade di eleganti costruzioni di Geometria descrittiva (in buona parte tratte da anteriori pubblicazioni dell'A.), le quali pongono in luce la grande utilità della geometria infinitesimale sintetica nella ricerca di procedimenti grafici economici; lo notiamo espressamente perchè le considerazioni di questo tipo godono presso di noi scarso favore, non avendo sinora raggiunto la sicurezza ed il rigore di cui godono altri processi logici generalmente in uso.

Il secondo volume, per converso, svolge esclusivamente soggetti appartenenti alle applicazioni, sempre però con la fida scorta di una logica serrata. I temi trattati sono: *Geometria applicata*, *Stereotomia*, *Statica grafica*, *Calcolo grafomeccanico*, *Nomografia;* in un' Appendice si trova insegnata la descrizione di tutte le curve algebriche mediante sistemi articolati, sono esposti, seguendo B. Mayor, i fondamenti della statica grafica dei sistemi a tre dimensioni e finalmente è fatto conoscere un'integrazione grafo-meccanica dell'equazione di Riccati.

Il lettore troverà forse meraviglioso che nel giro di 700 pagine vengano fatte conoscere delle teorie, ad ognuna delle quali venivano consacrati corsi annuali o grossi volumi. La spiegazione di ciò sta nel fatto che l'insegnamento impartito nella Scuola Politecnica da ogni professore suole venire integrato da molte ore settiminali di esercizi, onde all'assistente spetta di svolgere ed applicare l'opera del professore. Siccome d'altra parte, ufficio delle scuole in genere, non è nè può essere quello d'insegnare tutti i teoremi e tutte le costruzioni che possono essere necessari all'allievo durante la vita, ma precisamente quello d'*insegnare a studiare*, così il nostro A. ha cura di segnalare le migliori opere a cui deve ricorrere chi desidera vedere completamente trattati alcuni argomenti da lui semplicemente sfiorati.

Da quanto esponemmo risulta che l'opera del d'Ocagne possiede un valore che è per noi grato dovere l'esplicitamente constatare; la lettura

Digitized by Google

di essa va caldamente consigliata, non soltanto a chi studia od insegna nei nostri Politecnici, ma anche agli aspiranti ad una laurea dottorale, che essa è indicatissima per far loro assumere quell'orientamento della loro mente verso la realtà, da molti reputato urgente e da tutti dichiarato utile.

G. L.

Geodesia.

P. FANTASIA, *Sistema di proiezione conforme col centro nel punto trigonometrico M.^e Mario.* Napoli, L. Pierro, 1918, 8° gr. p. 186 (Pr. L. 8).

È un'esposizione accurata del sistema di proiezione conforme di Gauss dell'ellissoide terrestre, fatta seguendo le tracce di Schreiber e Hezemann, con applicazione ad un sistema di coordinate rettangolari avente per origine il punto trigonometrico Monte Mario di Roma. Essa costituisce un utile complemento agli ordinari complementi di geodesia, intelligibile anche per coloro che non hanno familiarità con le matematiche superiori.

G. L.

Geometria descrittiva.

C. PERREGAUX et A. WEBER. *Le relief en Géométrie par les couleurs complémentaires. 50 planches de Stéréométrie et de Géométrie Descriptive.* Bienne, E. Magron, éditeur, 1914. (Prezzo 25 fr.)

Questa raccolta offre estese applicazioni del concetto che servì a costruire gli « anaglifi » (v. questo *Bollettino*, T. XVI, 1914, p. 55-6); ogni tavola contiene due prospettive del medesimo oggetto, una disegnata in rosso e l'altra in verde, con un segno per indicare dove deve collocarsi l'occhio dell'osservatore; le spiegazioni necessarie all'intelligenza del testo sono scritte in francese ed in tedesco; alla raccolta è anneso un pajo d'occhiali, uno rosso e l'altro verde. Servendosi con una certa cura di tali ausiliari l'impressione del rilievo riesce perfetta. I soggetti trattati appartengono per una metà alla stereometria e per l'altra agli elementi della geometria descrittiva (metodo di Monge). G. L.

Curve gobbe.

WILHELM SCHELL'S *Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krummung. Dritte Auflage nou bearbeitet von Erich Salkowski.* Mit. 66 Figuren in Text. 8° p. XI + 196 Leipzig und Berlin, G. B. Teubner 1914. (Pr. M. 8).

Questa ricomparsa sul mercato librario della ben nota opera dello Schell (cfr. questo *Bollettino*, T. I, 1898, p. 15-16), la quale ha luogo dopo la morte dell'autore, ci costringe ad esprimere una nuova volta la

Digitized by Google

nostra disapprovazione per il sistema di recente adottato (indubbiamente in base a considerazioni di natura esclusivamente commerciale) di fare postume edizioni di opere che hanno già un posto onorevole nella letteratura scientifica, dopo di avervi apportate delle modificazioni profonde per mano di altri: hanno così origine esseri di fisonomia incerta e di paternità malsicura, dinnanzi a cui il critico si arresta titubando. Gli inconvenienti di siffatto sistema si manifestano in modo impressionante nell'occasione che oggi ci si presenta, chè fra l'autore dell' opera primitiva e colui che ha curata la nuova esiste pochissima affinità intellettuale: infatti il Salkowski, come è risaputo, è un matematico che seppe acquistare buona rinomanza applicando allo studio della geometria infinitesimale le risorse più raffinate dell'analisi moderna, mentre lo Schell è celebre per un magistrale trattato di meccanica recante come motto la caratteristica frase « geometrica geometrice ». Tale inconciliabile discrepanza d' idee fra l'uno e l'altro risulta dalla Prefazione alla pubblicazione di cui ci occupiamo, di cui giova riferire quì gli squarci più espressivi:

« La teoria delle curve di W. Schell si propose il problema di svolgere tale argomento con mezzi elementari e puramente intuitivi sino al punto da rendere palese l'importanza di siffatte considerazioni. Ora quando mi fu presentata la questione di preparare una nuova edizione, dovetti anzitutto esaminare se fosse ancora possibile il battere tale via, oppure se le maggiori esigenze di rigore nelle dimostrazioni — che, con piena ragione, vengono ora insegnate ai giovani matematici sino dai primi semestri dei loro studi universitari — non facessero apparire illusorio quanto era stato scoperto intuitivamente a partire dall'epoca di Roberval, di Huygens e di Réaumur. Ed in realtà chi ha l'abitudine di sospettare dappertutto la presenza di fenomeni patologici, mai presterà fede ai propri occhi e mai considererà come dimostrato un teorema di geometria prima di averlo verificato analiticamente. Però anche il critico più acuto non potrà senza inconvenienti sprezzare l' azione suggestiva esercitata dalla contemplazione diretta della figura. Giacchè il più abile maneggio del più perfetto apparato analitico non deve impedire di ravvisare il contenuto geometrico dei risultati, nel loro vero significato.

È appena necessario di dire esplicitamente che al metodo geometrico deve essere precluse tutto quanto si può considerare come singolarità; ond'è necessario limitarsi, sino dal principio, al caso regolare, epperò p. es., di esigere che una curva possa, in un suo punto generico, surrogarsi, in prima approssimazione con una retta determinata ed in seconda

Digitized by Google

con una circonferenza pure determinata. Soltanto siffatte « porzioni regolari di curve » possono venire trattate senza penosa diffidenza; ad esse appunto trova applicazione quante esporremo. Naturalmente sarebbe disconoscere tl vero stato delle cose il pensare che il metodo geometrico sia in grado di sostituire completamente la Geometria differenziale; invece esso può e vuole essere soltanto un complemento di essa; come tale, però, esso è pienamente legittimo ed appunto per ciò necessario.

In conseguenza di tutte queste considerazioni io avrei ritenuto deplorevole che un'opera come quella dello Schell scomparisse dalla letteratura matematica, non fosse alfro perchè, per mia esperienza personale, ho potuto più volte osservare che questo libricino esercita uno stimolo potente sull'opera individuale. Quantunque la via e lo scopo ne furono additati con sufficiente sicurezza nelle due edizioni precedenti, tuttavia, in certi particolari si manifestò necessaria una redazione del tutto nuova. Che alcuni ragionamenti non abbastanza stringenti, e come tali già segnalati dalla critica, siano stati sostituiti con altri migliori, è un fatto che non ha bisogno di alcuna giustificazione. Più profonda ancora fu un'altra modificazione prodotta da un metodo di dimostrazione più uniforme, cioè la introduzione sistematica della rappresentazione sferica; essa si trova pure applicata, sia pure clandestinamente, in svariate occasioni nella II edizione: ma parve ora necessario di trattarla con tutta la debita ampiezza.

Poichè, quantunque nello spazio cuclideo questo metodo non assuma la posizione dominante che hanno nello spazio ellittico le due immagini sferiche, tuttavia col mezzo di esso si possono stabilire più facilmente tutta una serie di proprietà. Ciò va detto particolarmente riguardo alle questioni di segno, le quali possono in tal modo risolversi abbastanza agevolmente.

Tuttavia tali questioni di segno rappresentano sempre i punti più spinosi in qualunque esposizione geometrica sintetica della Geometria infinitesimale. Sorvolare sopra di esso non sembra consigliabile nell'interesse stesse del principiante, affinchè egli non si abitui ad un modo di pensare superficiale, epperò non matematico. D'altronde un'esposizione troppo minuta e diffusa di cose elementari lo stancherebbe e spaventerebbe. Da ciò la necessità di un compromesso: talvolta una questione viene semplificata, introducendo opportune condizioni restrittive, talaltra invece la dimostrazione si limita ad un caso speciale, mentre nell' enunciato tutte le possibilità si trovano considerate e caratterizzate partitamente. Al lettore resta in conseguenza riserbata l'utile fatica di ripetere per proprio

Digitized by Google

conto il ragionamento esposto, arrecandovi le opportune modificazioni rese necessarie dalle nuove disposizione di figura, che egli stesso deve immaginare. »

A tale dichiarazioni metodologiche — ben differenti da quelle che si leggono nell'edizione precedente ed ispirate all'aspirazione « di sostituire i concetti ai calcoli » — aggiungiamo l'indice dei Capitoli costituenti la nuova, che il lettore paragonerà all' analogo da noi pubblicato altra volta (*Bollettino*, T. I, 1898, p. 15) onde farsi un concetto delle modificazioni subite dall'opera dello Schell grazie all'intervento del Salkowski.

Introduzione. I. Il triedro principale di una curva sghemba. II. Curvatura. III. Rappresentazione sferica. IV. Superficie delle tangenti ed evolventi filari. V. La superficie polare e le evolute. VI. Sfera osculatrice e cono esculatore. VII. Il piano rettificante. VIII. Superficie rigate non sviluppabili. IX. Superficie delle normali principali. X. Superficie delle binormali. XI. Curve sghembe speciali. XII. L'elica osculatrice e la lossodromia conica osculatrice. XIII. Geometria cinematica delle curve sghembe. XIV. Le superficie ciclificanti. XV. Coppie di curve. XVI. Le evolutoidi. XVII. Curve sghembe tra loro parallele. XVIII. Evolute successive. XIX. Altri teoremi e problemi. Riassunto delle principali formole.

Compiuta la lettura di questa interessante pubblicazione si è a noi presentata una nuova volta la questione se ed in qual misura le considerazioni geometriche potessero venire adoperate nello studio e nell' esposizione delle proprietà di cui godono le curve e le superficie qualunque. E, dopo natura riflessione, ci sembra di potere concludere che, almeno sino ad oggi, all'analisi è indispensabile ricorrere per definire con piena generalità le figure considerate e per enunciare le condizioni necessarie per l'esistenza degli enti geometrici che hanno con quelle determinazioni relazioni di contatto. Quando siansi così poste solide basi a tutte le argomentazioni, si potrà utilmente — senza scostarsi dal rigoroso metodo di argomentare che i Greci inaugurarono con l'esempio e che i moderni trasferirono dalla geometria all'analisi — applicare le eleganti e suggestive argomentazioni geometriche di cui nel libro di Schell e Salkowski si trovano tanti bellissimi esempi. Ridotte a siffatte proporzioni, le considerazioni di geometria infinitesimale sintetica potranno e dovranno venire annoverate fra quegli strumenti di ricerca che sarebbe ingiustizia il disprezzare e stoltezza l'ignorare.

G. L.

Digitized by Google

NOTIZIE

Temi di matematica posti a concorso dall'Istituto di Francia:

Grand Prix des Sciences mathématiques (1920): Perfezionare la teoria delle funzioni di una variabile che sono suscettibili di venire rappresentate mediante serie trigonometriche di parecchi argomenti, funzioni lineari di quella variabile.

Prix Bordin (1921): Perfezionare l'*analysis situs* svolta dal Poincaré in alcune serie celebri memorie. Si cercherà di riattaccare, almeno in alcuni estesi casi particolari, le questioni di geometria di situazione relative ad una data varietà, allo studio di espressioni analitiche convenientemente scelte.

Prix Damoiseau: I. Calcolare più esattamente, tenendo conto dei risultati di recenti spedizioni, l'attrazione della luna sulla « ciambella » determinata dalle maree alla superficie della terra. Esaminare l'effetto di questa attrazione sulla velocità angolare di rotazione della terra.

II. Perfezionare in alcuni punti importanti i lavori di Poincaré e Liapounoff sulle figure d'equilibrio relativo di una massa fluida rotante, sottoposta all'attrazione newtoniana. L'Accademia richiama in particolar modo l'attenzione dei concorrenti sulle questioni di stabilità e sullo studio delle oscillazioni infinitesime intorno ad una figura stabile.

***

Per incoraggiare la ricerca matematica. Il 17 febbraio 1917 morì a Bonn il noto matematico F. LONDON (n. a Liegnitz addì 6 aprile 1863), professore di matematica e decano della Facoltà filosofica di quell'Università. Per onorarne la memoria, suo cognato, altro noto scienziato, A. HAMBURGER, offrì all'Università stessa 30 mila marchi percostituire un fondo i cui interessi serviranno a favorire e ricompensare le indagini matematiche.

D'altronde il norvegese C. HANNEVIG ha destinata la somma di 100 mila corone a scopo analogo in onore di ABEL; si nutre speranza raggiungere presto le 250 mila corone; cosa non impossibile dal momento che una parente del fondatore vi ha già contribuito con altre 50 mila.

***

Kirkman e l'analisi combinatoria. L'articolo di Louise D. Cummnings intitolato *An undervalued Kirkman Paper (Bull. of the American math. Society,* Aprile 1918) ha per iscopo di mettere in luce l'importanza di un articolo del Kirkman pubblicato nel T. II (1847) del *Cambridge and*

Digitized by Google

Dublin mathem. Journal, di cui non tenne conto neppure E. Netto nelle sue note lezioni sopra l'analisi combinatoria e nell'articolo dell'*Enciklopädie der mathem. Wissenschaften.*

***

Un demi-siècle de civilisation française (1870-1915). È questo il titolo di un volume in cui è presentato un bilancio dei contributi dati al sapere dalla nostra sorella latina nel periodo storico interposto fra le due ultime guerre nelle quali essa si trovò impegnata. L'articolo relativo alle scienze esatte è dovuto a E. Picard *(Les sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle)*; ivi, nel breve giro di 24 pagine, sono delineati in modo geniale e brillante i progressi compiuti dalla Teoria delle funzioni analitiche, dalle Equazioni differenziali, dalla Teoria dei numeri, dall'Algebra, dalla Geometria differenziale, dalla Teoria delle funzioni di variabili reali e dalla Teoria degli insiemi; qualche aggiunta potrebbe farvisi riguardo alla Geometria pura, se non altro per ricordare l'opera del Mannheim.

***

Monumento a N. Tartaglia. Il 10 novembre 1918 venne inaugurato a Brescia, in una pubblica piazza, una statua in marmo al celebre matematico che in quella città ebbe culla ed a Venezia fece più lunga dimora. In tale occasione l'Ateneo di Brescia, che in quella pubblica manifestazione di grata riverenza ebbe parte preponderante, pubblicò un elegante opuscolo, riccamente illustrato, dal titolo: *Scoprendosi il Monumento a Nicolò Tartaglia*, contenente alcuni brevi articoli in omaggio al celebre emulo di Cardano; eccone i titoli:

U. DA COMO (presidente dell'Ateneo), *Esordio;*

ANTONIO FAVARO, *L. da Vinci e N. Tartaglia;*

GINO LORIA, *Nicolò Tartaglia e l'arte della guerra;*

G. FORNASINI, *I ritratti di Tartaglia;*

P. GUERRINI, *Intorno alla famiglia di N. Tartaglia* (malgrado le più diligenti ricerche il cognome dell'illustre scienziato è tuttora ignoto).

A. GNAGA, *Il problema dei pesi* (viene restituita a Tartaglia una soluzione attribuita per solito a Bachet de Méziriac);

F. GLISSENTI, *Un po' di storia del Monumento.*

Digitized by Google

714535 [redacted] QA
1
.B7
v.20-21
Sci

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CHICAGO
63 387 046

Digitized by Google